II Produit scalaire de 2 vecteurs du plan.

1°) Approche géométrique avec les projections orthogonales

Remarque : Il existe 2 sortes de produit que l'on peut faire avec les vecteurs :

→ si le résultat du produit de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est un vecteur alors il s'agit d'un produit vectoriel

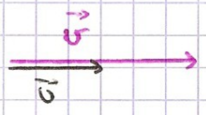
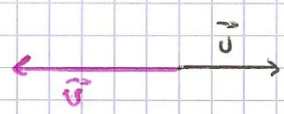
↳ NON TRAITÉ EN MATHS AU LYCÉE.

→ si le résultat du produit de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est un réel alors il s'agit du produit scalaire.

En fait les réels sont appelés les scalaires d'où le nom de ce produit qui sera noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ($\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$)

1er cas : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Définition : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et on a

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens	si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens opposés
	
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Remarques

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$ c'est la longueur du vecteur.
- Un produit scalaire peut être positif ou négatif.

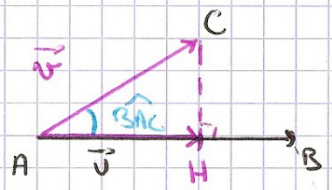
2ème cas : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs non colinéaires

Soient A, B et C 3 points du plan tels que

$\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$

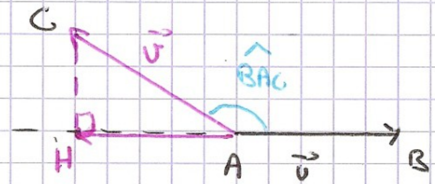
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB)



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AH}$

$= AB \times AH$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AH}$

$= -AB \times AH$

Remarque : on peut grâce à la trigonométrie calculer la distance AH à partir de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$

En appliquant les formules trigonométriques on a

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AH}{AC} \iff AC \cos(\widehat{BAC}) = AH$

Conséquence : On obtient une nouvelle écriture du produit scalaire :

Propriété : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$