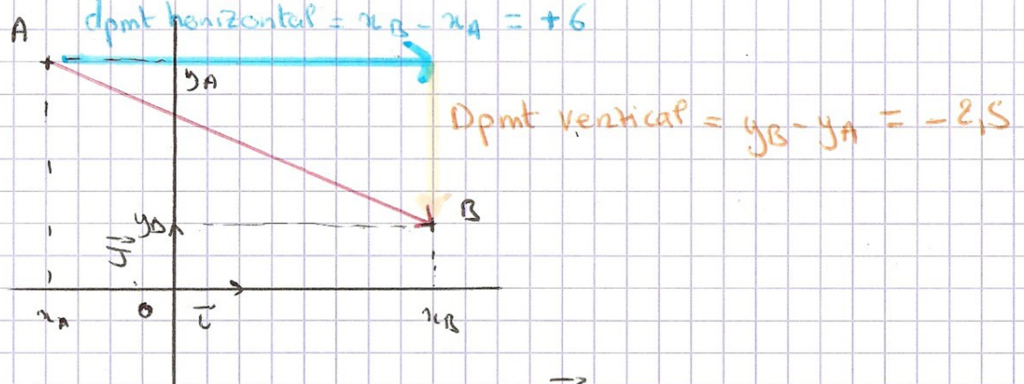
IV Expression analytique du produit scalaire

1°) Rappels : coordonnées de vecteurs

- le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
  c'est à dire que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux
  et que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

- Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ 2 points du plan.



Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrivent en colonne et on a

$\vec{AB}\begin{pmatrix} \text{deplacement horizontal} \\ \text{déplacement vertical} \end{pmatrix}$ → lecture graphique

ou encore $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ → par le calcul

- Ecriture d'un vecteur à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$
  Dans l'exemple ci dessus on a $\vec{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

on peut alors écrire que $\vec{AB} = 6\vec{i} - 2,5\vec{j}$.

En règle générale on a
$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

2°) Expression analytique.

Propriété : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration

On a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$

$$= xx' \times \vec{i}^{\,2} + xy' \times (\underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{=0}) + yx' \times (\underbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}_{=0}) + yy' \times \vec{j}^{\,2}$$

car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux

$$= xx' \times \vec{i}^{\,2} + yy' \times \vec{j}^{\,2}$$

$$= xx' \times \|\vec{i}\|^2 + yy' \times \|\vec{j}\|^2$$

$$= xx' + yy' \quad \text{car } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$$

Conséquence : soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En effet $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u} = xx + yy = x^2 + y^2$

donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$\boxed{\text{ssi}}$ $xx' + yy' = 0$