Démonstration

1°) $\overline{z+z'} = \overline{a+bi+a'+b'i}$

$= \overline{(a+a')+(b+b')i}$

$= a+a'-(b+b')i$ (1)

D'autre part $\overline{z}+\overline{z'} = a-bi+a'-b'i$

$= a+a'+(-b-b')i$

$= a+a'-(b+b')i$ (2)

(1) = (2) d'où la propriété

2°) trivial

3°) $zz' = (a+bi)(a'+b'i)$

$= aa'+ab'i+ba'i+bb'i^2$

$= aa'-bb'+(ab'+ba')i$

donc $\overline{zz'} = aa'-bb'-(ab'+ba')i$ (1)

D'autre part

$\overline{z}\,\overline{z'} = (a-bi)(a'-b'i)$

$= aa'-ab'i-a'bi+bb'i^2$

$= aa'-bb'+(-ab'-a'b)i$

$= aa'-bb'-(ab'+a'b)i$ (2)

(1) = (2) d'où la propriété

4°) $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

donc $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$ (1)

D'autre part $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-bi} = \frac{1(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a+bi}{a^2+(-b)^2}$

$= \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$ (2)

(1) = (2) d'où la propriété

5°) $\overline{\frac{z}{z'}} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} \underset{\text{prop 3}}{=} \overline{z} \times \overline{\frac{1}{z'}} \underset{\text{prop 4}}{=} \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Copyright : ©Programmaths 2020