VI Fonction dérivée - Dérivée des fonctions de référence

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

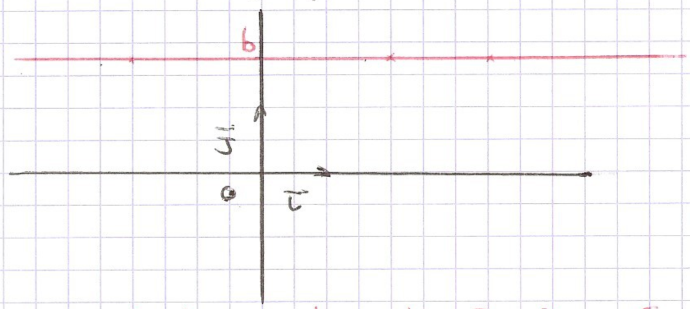
- Si f'(x) existe pour tout réel x de I
  Alors on dit que la fonction f est dérivable sur I
- La fonction dérivée de f, notée f' est la fonction qui à tout réel x de I associe le réel f'(x)

Remarque : Autrement dit, la fonction dérivée permet de calculer le coefficient directeur de toutes les tangentes à la courbe représentative de f

Exemple de calcul de fonctions dérivées

- Les fonctions constantes : $f(x) = b$ $\quad b \in \mathbb{R}$

Elles font partie des fonctions affine ($f(x) = 0x + b$)
leur représentation graphique est une droite horizontale

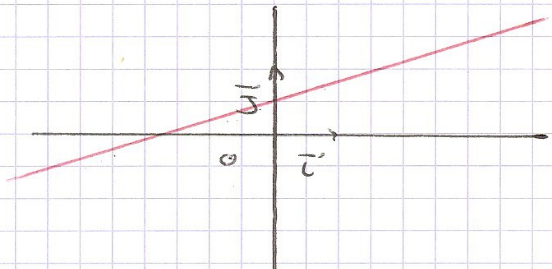


Propriété : Une droite est tangente à elle-même en chacun de ses points

Pour ces fonctions constantes, la droite est horizontale elle a donc pour coefficient directeur 0

Conclusion : $f'(x) = 0$

- Les fonctions affines $f(x) = ax + b$



La droite a pour coefficient directeur a

Conclusion $f'(x) = a$

- Une fonction affine particulière : $f(x) = x = 1x + 0$

On obtient alors $f'(x) = 1$

- La fonction carré . $f(x) = x^2$

La courbe représentative n'est pas une droite mais une parabole . On ne peut donc pas traiter cette fonction graphiquement . Il faut passer par le taux de variation

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\tau(x, x+h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) = (x+h)^2$$

$$= \frac{(\cancel{x^2} + 2hx + h^2) - \cancel{x^2}}{h} \qquad = x^2 + 2hx + h^2$$

et $f(x) = x^2$

$$= \frac{2hx + h^2}{h}$$

$$= \frac{2hx}{h} + \frac{h^2}{h}$$

$$= 2x + h$$

$$\lim_{h \to 0} \tau(x, x+h) = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x = f'(x)$$

Conclusion : $f'(x) = 2x$

Tableau de dérivation des fonctions de référence

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = b \quad b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b \quad a, b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n \quad (n \geq 1)$	$f'(x) = n x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \geq 1$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1ère technologique

1ère STI

complément