

CALCUL INTÉGRAL

PRIMITIVE D'UNE FONCTION

I Notion de primitive d'une fonction

Exemple: On considère la fonction carré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$
 f est dérivable sur \mathbb{R} et on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$

Du point de vue des vocabulaire, les 2 phrases suivantes sont équivalentes :

- $f'(x) = 2x$ est la dérivée de $f(x) = x^2$
- ⇔ • $f(x) = x^2$ est une primitive de $f'(x) = 2x$

En effet, si l'on prend $g(x) = x^2 + 3$ on a alors $g'(x) = 2x$
donc $g(x)$ est aussi une primitive de $f'(x) = 2x$

Remarque : on aurait pu prendre n'importe quelle constante à la place de 3, on aurait obtenu la même dérivée.

↳ Une primitive est définie à une constante additive près

ATTENTION

- La fonction dérivée est unique.
- Il existe une infinité de primitives

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I
La fonction F est une primitive de f sur I

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I \quad F'(x) = f(x) \end{cases}$$

Remarque : On utilisera des lettres minuscules pour la fonction dont on cherche une primitive et des majuscules pour les primitives

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

[Si] F est une primitive de f sur I

[Alors] Toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

Tableau des primitives des fonctions de référence

$f(x)$	$F(x)$
$f(x) = 0$	$F(x) = C$ $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = a$ $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + b$ $b \in \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$ $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$ $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

Remarque :

- Ce tableau s'obtient par lecture inverse du tableau de dérivation
- Astuce pour mémoriser avec le cercle trigonométrique pour les fonctions sinus et cosinus

