III Différence entre LES, UNE et LA primitive : Exercice type

Propriété (admise)

Soit f une fonction qui admet des primitives sur I

f admet une unique primitive F sur I qui vérifie la condition initiale $F(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$

Remarque : En fait, la condition initiale permet de calculer la valeur de la constante

Exercice type :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 5$

1°) Déterminer LES primitives de f sur $\mathbb{R}$

2°) Déterminer UNE primitive de f sur $\mathbb{R}$

3°) Déterminer LA primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(6) = 0$

1°) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 5x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

2°) Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x$$

Il suffit de choisir une valeur pour C (en général on prend $C = 0$)

3°) On nous donne la condition initiale $F(6) = 0$

on sait que $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

on a $F(6) = 0 \iff \frac{6^3}{3} + \frac{3 \times 6^2}{2} - 5 \times 6 + C = 0$

$\iff 72 + 54 - 30 + C = 0 \iff C = -96$

Conclusion : LA primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(6) = 0$ est définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x - 96$