II Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est notée E(X) et on a

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

<u>Notation</u> : Quand on a une somme indicée où chacun des termes de la somme est calculé toujours de la même façon, on peut simplifier l'écriture en utilisant la notation suivante :

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

qui se lit : " La somme, pour i variant de 1 à n des x_ip_i "

<u>Remarque très importante</u>

Comme une probabilité correspond à une fréquence statistique, le calcul de l'espérance mathématique est le même que le calcul de la moyenne : pour rappel $\bar{x} = x_1f_1 + \dots + x_nf_n$

L'espérance est donc la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire affectées des probabilités correspondantes

Conséquence : Pour interpréter l'espérance mathématique il faudra construire une phrase comportant

- le verbe espérer
- l'expression " en moyenne "
- une indication pour exprimer qu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

(cela permet de passer du modèle probabiliste théorique aux statistiques en faisant une prédiction)

Reprenons l'exemple précédent

x_i	98	3	0	-2	Total
$p_i = p(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{84}{100}$	1
$x_i p_i$	$\frac{98}{100}$	$\frac{15}{100}$	0	$-\frac{168}{100}$	$-\frac{55}{100}$

$\Rightarrow E(X) = -0,55$

On obtient donc d'après la dernière ligne du tableau (ou à la calculatrice) $E(X) = -0,55$

que l'on peut interpréter de la façon suivante :
Sur un grand nombre de tickets achetés, on peut espérer perdre seulement 55 centimes d'euros en moyenne par billet acheté

Remarque : Vocabulaire
Lorsque l'expérience aléatoire correspond à un jeu et que la variable aléatoire est égale au gain algébrique du joueur, on dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance mathématique est égale à 0

Remarque :
Comme en statistiques, la moyenne (ici, l'espérance) est insuffisante pour décrire l'expérience.
Il faudra donc d'autres outils pour affiner cette étude, afin de traduire la fluctuation d'échantillonnage, de faire des estimations plus précises, de prendre des décisions ou encore de donner des intervalles de confiance