IV Linéarité de l'espérance

Propriété :

Soit X une variable aléatoire.

Soit a et b 2 réels

Soit Y la variable aléatoire égale à $aX + b$

Alors
1. $E(Y) = a\,E(X) + b$
2. $V(Y) = a^2 V(X)$
3. $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$

Démonstration :

On remarque que pour toute valeur y_i de la variable aléatoire Y

on a $p(\{Y = y_i\}) = p(\{Y = ax_i + b\}) = p(\{X = x_i\}) = p_i$

on a donc le tableau suivant.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$y_i = ax_i + b$	ax_1+b	ax_2+b	...	ax_n+b
$p_i = p(\{X = x_i\}) = p(\{Y = y_i\})$	p_1	p_2	...	p_n

On a alors

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= p_1(ax_1+b) + p_2(ax_2+b) + \dots + p_n(ax_n+b) \\
&= ap_1x_1 + p_1b + ap_2x_2 + p_2b + \dots + ap_nx_n + p_nb \\
&= a\,(\underbrace{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}_{E(X)}) + b\,(\underbrace{p_1 + p_2 + \dots + p_n}_{1}) \\
&= a \times E(X) + b \times 1 \\
&= a\,E(X) + b
\end{aligned}
$$

et $V(Y) = p_1\left[ax_1 + \cancel{b} - (aE(x) + \cancel{b})\right]^2 + \dots + p_n\left[ax_n + \cancel{b} - (aE(x) + \cancel{b})\right]^2$

$$= p_1\left[ax_1 - aE(x)\right]^2 + p_2\left[ax_2 - aE(x)\right]^2 + \dots + p_n\left[ax_n + aE(x)\right]^2$$

$$= p_1\left[a(x_1 - E(x))\right]^2 + \dots + p_n\left[a(x_n - E(x))\right]^2$$

$$= a^2 p_1 (x_1 - E(x))^2 + \dots + a^2 p_n (x_n - E(x))^2$$

$$= a^2 \left[\underbrace{p_1(x_1 - E(x))^2 + \dots + p_n(x_n - E(x))^2} \right]$$

$$= a^2 \times V(x)$$

$$= a^2 V(x)$$

Par suite $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{a^2 . V(x)} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{V(x)}$

$$= |a| \times \sqrt{V(x)} = |a|\, \sigma(x)$$

Exemple : On reprend la tombola mais on triple le montant des lots gagnants et on fixe le prix du ticket à 4 euros.

1°) Montrer que la nouvelle variable aléatoire Y égale au gain algébrique du joueur est $Y = 3x + 2$

2°) En déduire l'espérance de Y. Le jeu est-il toujours défavorable au joueur ?

1°) On a X = montant des lots $- 2$

$\iff$ montant des lots $= X + 2$

donc $Y = 3 \times (X + 2) - 4$

$$= 3x + 6 - 4$$

$$= 3x + 2$$

2°) On a donc $E(Y) = 3\,E(x) + 2$

$$= 3 \times (-0{,}55) + 2 = 0{,}35$$

Conclusion : le jeu est en faveur du joueur.