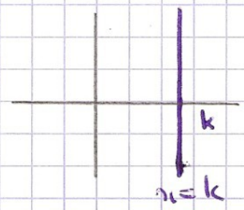
III Recherche de l'axe de symétrie et du sommet de la parabole

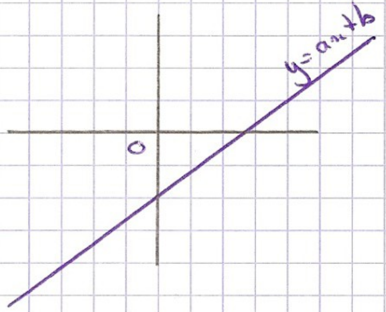
Rappel : Equation de droites

Il y a 2 catégories de droites :

- les droites verticales d'équation $x = k$



- les droites non verticales qui sont toutes des représentations graphiques de fonctions affines. Elles ont pour équation $y = ax+b$



- si $a=0$ la droite est horizontale
- si $b=0$ la droite passe par O

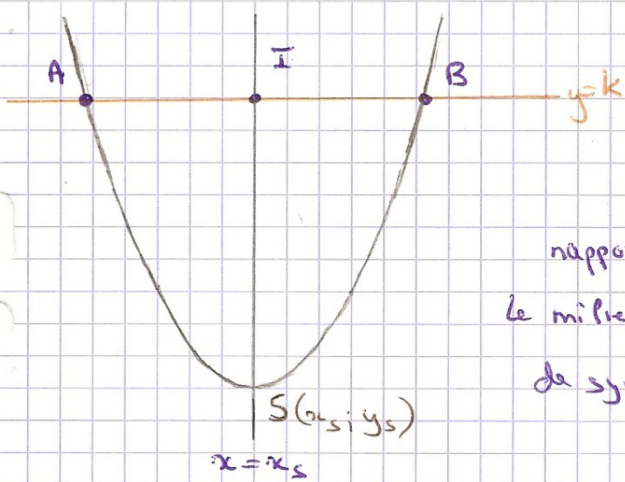
> **A RETENIR**
>
> Les axes ont pour équation :
>
> $x = 0$ pour l'axe des ordonnées
>
> $y = 0$ pour l'axe des abscisses

Pour l'axe de symétrie d'une parabole, on recherche donc une équation du type $x = k$

1°) Avec un exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$ et sa parabole représentative d'équation $y = f(x)$ soit $y = 2x^2+6x-3$

Principe de la méthode :



On coupe la parabole avec une droite horizontale d'équation $y = k$. On obtient 2 points d'intersection A et B symétriques par rapport à l'axe de la parabole.

Le milieu I de [AB] est donc sur l'axe de symétrie et a même abscisse que le sommet S

On prend la dte d'équation $y = -3$

on cherche les antécédents de -3 par f donc on résout

$f(x) = -3$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x \cancel{-3} = \cancel{-3}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 0$ → AUTOMATISME 1 : delta

$\Leftrightarrow x(2x + 6) = 0$ → AUTOMATISME 2 : FACTORISER

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

Conclusion : les 2 points d'intersection sont $A(0\,;-3)$ et $B(-3\,;-3)$

donc I milieu de $[AB]$

$\Leftrightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$\Leftrightarrow I\left(\frac{0 - 3}{2}\,;\,\frac{-3 - 3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow I\left(-\frac{3}{2}\,;\,-3\right)$

donc $x_S = x_I = -\frac{3}{2}$

L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = \frac{-3}{2}$

et le sommet S a pour coordonnées $S\left(-\frac{3}{2}\,;\,f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$

on peut donc construire le tableau de variation

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
variation de f	↘	$f\left(-\frac{3}{2}\right)$	↗

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \ldots$

2°) Cas général.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ on prend la droite d'équation $y = c$

On résout $f(x) = c$

$\Leftrightarrow ax^2 + bx + \cancel{c} = \cancel{c}$

$\Leftrightarrow ax^2 + bx = 0$

$\Leftrightarrow x(ax + b) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $ax + b = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$

Donc $A(0, c)$ et $B(-\frac{b}{a}, c)$ sont les 2 points d'intersection de la parabole avec la dte $y = c$

I milieu de $[AB]$ $\Leftrightarrow x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 - \frac{b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$

donc $x_S = \frac{-b}{2a}$

Propriété : Soit f une fonction trinôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et soit $\mathcal{P}$ sa parabole représentative.

Le sommet de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $S\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

L'axe de symétrie a pour équation $x = -\frac{b}{2a}$