2°) Vérification par le calcul

Remarque : un nombre positif est neutre dans la règle des signes vue en classe de $4^{ème}$:

$+ \ \boxed{\times +} = \boxed{+}$

$+ \ \boxed{\times -} = \boxed{-}$

La multiplication par un nombre positif conserve le signe

1er cas : si $\Delta > 0$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les 2 racines du trinôme

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

On suppose que $x_1 < x_2$. a est de signe quelconque

2ème cas : si $\Delta = 0$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		$+$	0	$+$	
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		signe de a	0	signe de a	

← un carré est toujours positif.

3ème cas : si $\Delta < 0$

On utilise la forme canonique car il n'y a pas de factorisation

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

On va étudier le signe de $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ en travaillant avec les inégalités

$$\Delta < 0$$

$$\Leftrightarrow -\Delta > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$ or $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

On peut donc construire le tableau de signe

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$	$+$
$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$	signe de a