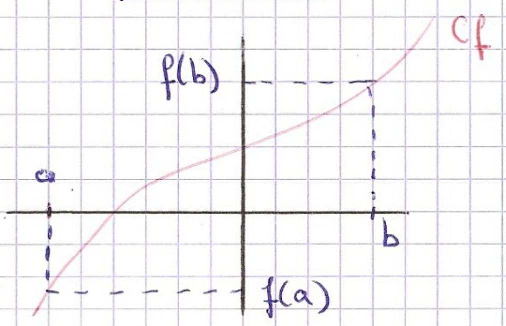
IV Etude des variations d'un trinôme du second degré

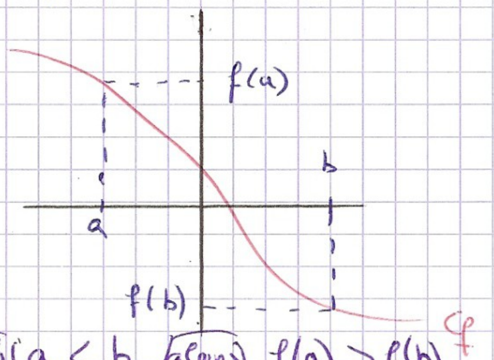
Rappel : Sens de variation d'une fonction.

f croissante



$\boxed{\text{si}}$ $a < b$ $\boxed{\text{Alors}}$ $f(a) \leq f(b)$

f décroissante



$\boxed{\text{si}}$ $a < b$ $\boxed{\text{alors}}$ $f(a) \geq f(b)$

Une fonction croissante CONSERVE l'ordre entre les antécédents et leurs images

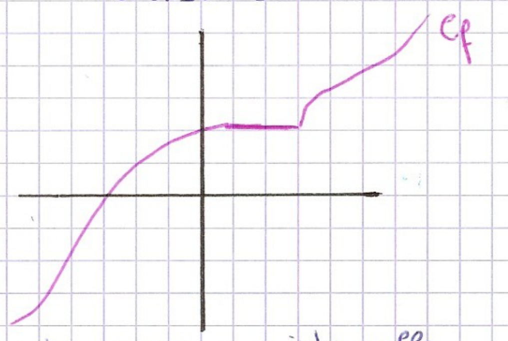
Une fonction décroissante INVERSE l'ordre entre les antécédents et leurs images

Remarque :

- f strictement croissante : $a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$
  f strictement décroissante : $a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$

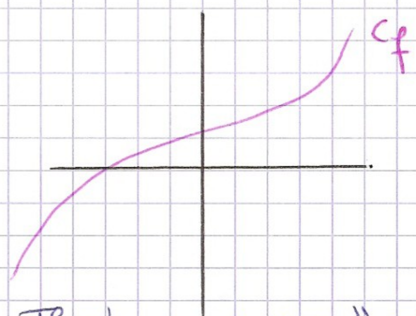
- Différence entre croissante et strictement croissante

Croissante



Il peut y avoir un intervalle sur lequel la fonction est constante

strictement croissante



Il n'y a aucun "pallier"

Méthode générale : Etude des variations d'une fonction.

On choisit 2 réels a et b (ou x_1 et x_2) tels que $a < b$ et on compare leurs images $\Rightarrow$ on étudie le signe de $f(a) - f(b)$

Application au trinôme du second degré.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré $(a \neq 0)$

On sait que $\mathcal{C}_f$ est une parabole et que le sommet S a pour coordonnées $S\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

On applique la méthode générale d'étude des variations d'une fonction sur $\left]-\infty ; -\frac{b}{2a}\right]$

Soient x_1 et x_2 2 réels de $\left]-\infty ; -\frac{b}{2a}\right]$ tels que

$$x_1 < x_2 \leq -\frac{b}{2a}$$

On étudie le signe de $f(x_1) - f(x_2)$

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= (ax_1^2 + bx_1 \cancel{+c}) - (ax_2^2 + bx_2 \cancel{+c}) \\
&= ax_1^2 + bx_1 - ax_2^2 - bx_2 \\
&= ax_1^2 - ax_2^2 + bx_1 - bx_2 \\
&= a(x_1^{\boxed{2}} \boxed{-} x_2^{\boxed{2}}) + b(x_1 - x_2) \\
&= a\,(x_1 - x_2) \times (x_1 + x_2) + b \times (x_1 - x_2) \\
&= (x_1 - x_2)\left[a(x_1 + x_2) + b\right]
\end{aligned}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

On étudie le signe de chacun des facteurs.

⊛ pour $(x_1 - x_2)$

On a choisit $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$ $\boxed{\text{négatif}}$

⊛ pour $a(x_1 + x_2) + b$

Cas où $a < 0$

$$\begin{array}{rl}
 & x_1 < -\frac{b}{2a} \\
+ & x_2 \leq -\frac{b}{2a} \\
\hline
 & x_1 + x_2 < \cancel{2} \times \left(-\frac{b}{\cancel{2}a}\right)
\end{array}$$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 < -\frac{b}{a}$

$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2) > -\frac{b}{\cancel{a}} \times \cancel{a}$

$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2) > -b$

$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2) + b > 0$ $\boxed{\text{positif}}$

Cas où $a > 0$

$$\begin{array}{rl}
 & x_1 < -\frac{b}{2a} \\
+ & x_2 \leq -\frac{b}{2a} \\
\hline
 & x_1 + x_2 < -\frac{b}{a}
\end{array}$$

$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2) < -b$

$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2) + b < 0$

$\boxed{\text{négatif}}$

Cas où $a < 0$

$(x_1 - x_2)$ négatif

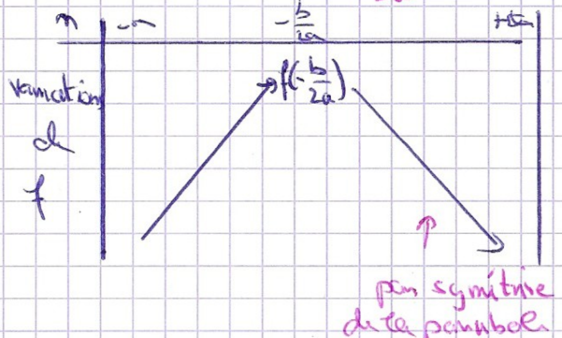
et $a(x_1+x_2)+b$ est positif

donc le produit est négatif

$\iff f(x_1) - f(x_2) < 0$

$\iff f(x_1) < f(x_2)$

f est strictement croissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$



La parabole est orientée vers le bas

Cas où $a > 0$

$(x_1 - x_2)$ est négatif

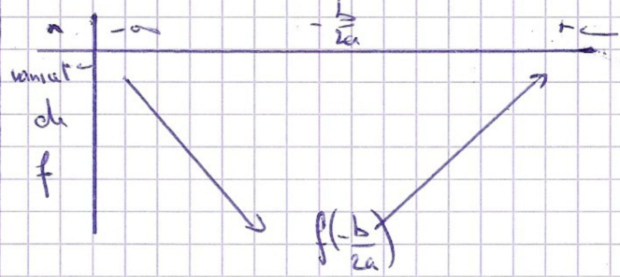
et $a(x_1+x_2)+b$ est négatif

donc le produit est positif

$\iff f(x_1) - f(x_2) > 0$

$\iff f(x_1) > f(x_2)$

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$



La parabole est orientée vers le haut