

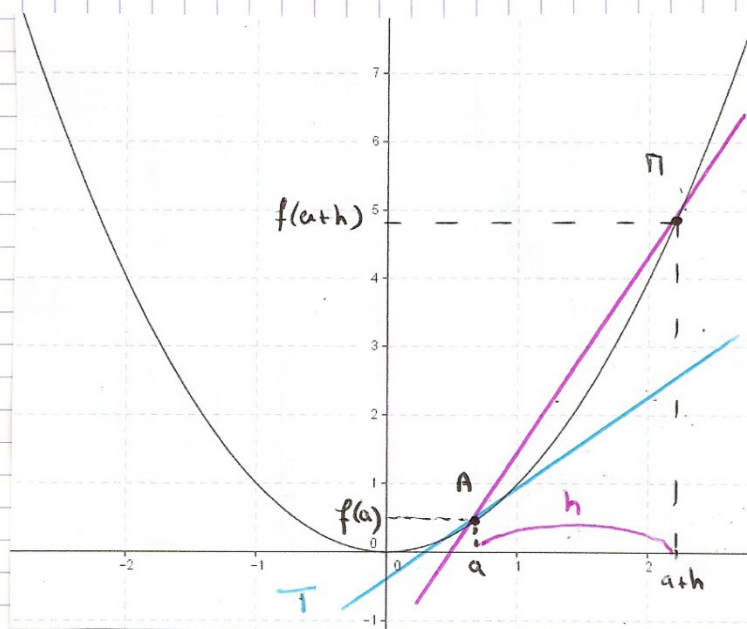
IV. Nombre dérivé

Exemple général avec la fonction carrée

On considère le point A d'abscisse a

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ (réel strictement positif)

Soit M le point d'abscisse $(a+h)$



Soit T la tangente à f
au point A d'abscisse a

$$\begin{aligned} \text{On a } A(a, f(a)) \\ \Leftrightarrow A(a, a^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } N(a+h, f(a+h)) \\ \Leftrightarrow N(a+h, (a+h)^2) \end{aligned}$$

- Calculons $\hat{\tau}(a; a+h)$

$$\hat{\tau}(a, a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Prenons maintenant des valeurs de h de plus en plus proches de 0

On constate alors que le point N se rapproche de plus en plus du point A et que la droite (AN) vient progressivement se confondre avec la tangente à f au point A d'abscisse a

Attention: (AN) et T restent distinctes car (AN) possède toujours 2 points d'intersection avec f alors que T n'en possède qu'un seul : le point de contact A.

donc le coefficient directeur de (AT) , c'est à dire $\tau(a, a+h)$
se rapproche de plus en plus de celui de la tangente T

On dit qu'on a fait tendre h vers 0 et on écrit :

Quand h tend vers 0, $\tau(a, a+h)$ tend vers le coeff directeur de T
ou en cône :

Quand $h \rightarrow 0$, $\tau(a, a+h) \rightarrow$ coeff directeur de T

"tend vers" = notation officielle mathématique

Ceci correspond à la notion de limite qui sera développée
en terminale

La phrase précédente s'écrit alors en notation mathématique
définitive :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(a, a+h) = \text{coefficient directeur de } T$$

"la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation
de la fonction entre a et $a+h$ est égale au
coefficient directeur de la tangente à la courbe
représentative de f au point A d'abscisse a "

Attention : le signe " $=$ " n'est pas un vrai signe " $=$ "
c'est une notation pratique pour les calculs mais
il signifie ici "tend vers"

En terminant le calcul des taux de variation, nous
allons pouvoir déterminer le coefficient directeur de
la tangente au point A en fonction de a .

$$\begin{aligned}
 \hat{L}(a; a+h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
 &= \frac{\cancel{a^2} + 2ah + \cancel{h^2} - \cancel{a^2}}{h} \\
 &= \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{2ah}{h} + \frac{h^2}{h} \\
 &= 2a + h
 \end{aligned}$$

Quand $h \rightarrow 0$ alors $2a+h \rightarrow 2a$

Conclusion: le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A d'abscisse a est $2a$.

Expe: A(2; 4) la tangente aura pour coeff directeur $2 \times 2 = 4$
 B(3; 9) " " $2 \times 3 = 6$
 C(-5; 25) " " $2 \times (-5) = -10$

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Soit $a \in I$

f est dérivable en a

ssi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L \in \mathbb{R}$

L est alors appelé le nombre dérivé de f en a
 et il est noté $f'(a)$

Propriété: $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a .