

VI Fonction dérivée

(1°) Définition et exemple avec la fonction carrée

Lors de l'étude de la dérivabilité de la fonction carrée en un réel a , on a calculé le taux de variation de la fonction entre a et $a+h$.

$$\text{on a } f(x) = x^2$$

$$\text{et } T(a, a+h) = 2a+h \quad (\text{voir h.5 : Nombre dérivé})$$

On a ensuite calculé la limite de ce taux quand $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(a, a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2a+h = 2a$$

On en conclut que

- la fonction carrée est dérivable en a
- $f'(a) = 2a$
- la tangente a pour coefficient directeur $2a$

On a ainsi trouvé une formule, donc on a défini une fonction, qui permet de calculer le nombre dérivé pour n'importe quelle valeur de a .

Cette fonction s'appelle la fonction dérivée.

Définition: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I (c'est à dire dérivable en tout réel a de I).

la fonction dérivée de f , notée f' est la fonction qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé de la fonction f en x .

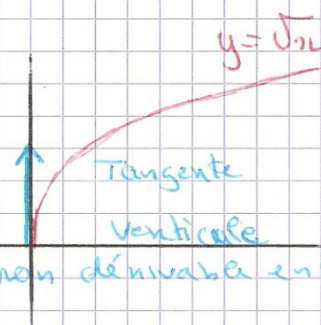
Remarque: la fonction dérivée permet donc de calculer le coefficient directeur de toutes les tangentes à la courbe.

exemple: Avec la fonction carrée on a $f(x) = x^2$ et donc $f'(x) = 2x$ d'après l'étude de la limite du taux de variation

2°) Dérivée des fonctions de référence

$f(x)$ définie sur	$f'(x)$ définie sur
$f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = a$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \geq 1$) sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \geq 1$) sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$

Attention: La fonction racine carrée est la seule fonction de référence qui n'est pas dérivable sur la totalité de son ensemble de définition non dérivable en 0



Quelques démonstrations

- Pour $f(x) = a$

C'est une fonction constante



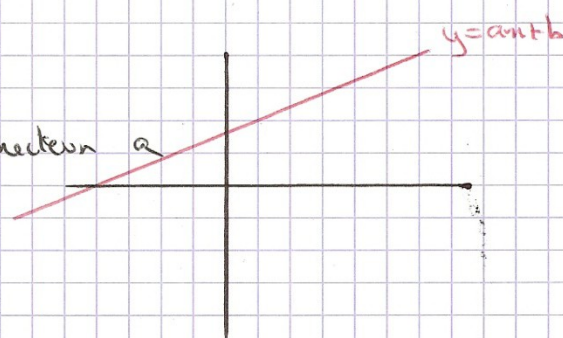
Propriété: une droite est tangente à elle-même en chacun de ses points.

La droite étant horizontale elle a pour coeff. directeur 0

$$\text{Cp: } f'(x) = 0$$

- pour $f(x) = ax + b$

La droite a pour coefficient directeur a



donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a$

- pour $f(x) = x$

C'est une fonction affine : $f(x) = 1x + 0$

d'après le résultat précédent $f'(x) = 1$

- pour $f(x) = x^3$

On a besoin d'une identité remarquable de degré 3

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Rq: Elle s'obtient facilement en utilisant la distributivité

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = \dots$$

$f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tau(a, a+h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{\cancel{a^3} + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - \cancel{a^3}}{h} \\ &= \frac{3a^2h}{h} + \frac{3ah^2}{h} + \frac{h^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0} \tau(a, a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} 3a^2 + \underbrace{3ah + h^2}_{\rightarrow 0} \\ &= 3a^2\end{aligned}$$

Conclusion: $f'(x) = 3x^2$

• pour $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}\tau(a, a+h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{1 \times a - 1 \times (a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{a - (a+h)}{a(a+h)h} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)h} \times \frac{1}{\cancel{h}} = \frac{-1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(a, a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(\underbrace{a+h}_{\rightarrow a})} = -\frac{1}{a^2}$$

Conclusion: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$