b) Formules de dérivation nécessitant une rédaction

Propriété 1 : Soient u et v 2 fonctions dérivables sur un intervalle I

Alors uv est dérivable sur I et on a

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

Remarque : Dans toutes les formules u et v sont des fonctions non constantes donc qui contiennent des x.

exemple : $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables

$u(x) = 3x+1 \qquad u'(x) = 3$

$v(x) = \sqrt{x} \qquad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x \qquad = \dfrac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 3x+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

Propriété 2 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I

Soit $n \in \mathbb{N}$

Alors u^n est dérivable sur I et on a $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$

exemple : $f(x) = (7x-1)^5$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables

$u(x) = 7x-1 \qquad u'(x) = 7$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5 \times 7 \times (7x-1)^4 = 35(7x-1)^4$

Propriété 3 : Soit u une fonction non nulle et dérivable sur un intervalle I

Alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et on a $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$

exemple : $f(x) = \frac{5}{2x^2+3x+7}$ définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = 5 \times \frac{1}{2x^2+3x+7}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonction dérivables à dénominateur non nul.

$u(x) = 2x^2+3x+7 \qquad u'(x) = 4x+3$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5 \times \frac{-(4x+3)}{(2x^2+3x+7)^2} = 5 \times \frac{-4x-3}{(2x^2+3x+7)^2}$

$= \frac{-20x-15}{(2x^2+3x+7)^2} = \frac{-5(4x+3)}{(2x^2+3x+7)^2}$

Propriété 4 : Soit u une fonction non nulle et dérivable sur un intervalle I

Alors $\frac{1}{u^n}$ est dérivable et on a $\boxed{\frac{1}{u^n} = \frac{-u'}{u^{n+1}}}$

exemple : $f(x) = \frac{-7}{(3x-5)^4}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$

$= -7 \times \frac{1}{(3x-5)^4}$

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$ à dénominateur non nul.

$u(x) = 3x-5 \qquad u'(x) = 3$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\} \quad f'(x) = -7 \times \frac{-3}{(3x-5)^5} = \frac{21}{(3x-5)^5}$

Propriété 5 : Soient u et v 2 fonctions dérivables sur un intervalle I avec $v(x) \neq 0$ sur I

Alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Attention : Il faut bien respecter l'ordre dans la formule et ne pas inverser u et v

exemple : $f(x) = \frac{2x-1}{8x+5}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{8}\right\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{8}\right\}$ comme quotient de 2 fonctions dérivables à dénominateur non nul.

$u(x) = 2x - 1$ $\quad u'(x) = 2$

$v(x) = 8x + 5$ $\quad v'(x) = 8$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{8}\right\}$ $\quad f'(x) = \frac{2(8x+5) - 8(2x-1)}{(8x+5)^2}$

$$= \frac{\cancel{16x} + 10 - \cancel{16x} + 8}{(8x+5)^2} = \frac{18}{(8x+5)^2}$$

Propriété 6 : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I

Alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

exemple : $f(x) = \sqrt{3x^2+5}$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables

$u(x) = 3x^2 + 5$ $\quad u'(x) = 6x$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+5}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}$