Etude des variations d'une fonction - Conjecture graphique.

Ex 41 : $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$

1°) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$

$\forall x \in]0, +\infty[$ $\quad f'(x) = 2 - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$

2°) Pour étudier les variations de f on étudie le signe de $f'(x)$

x	0		$+\infty$
$2x^2+1$		$+$	
x^2	0	$+$	
signe de $f'(x)$	‖	$+$	
variations de f	‖	↗	

Rq : Attention dans l'étude du signe de $f'(x)$
TOUS les facteurs doivent apparaître dans le tableau de signes

Ex 49 f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+9}{x+1}$ sur $]0,+\infty[$

1°) Graphiquement il semble que f admette un minimum local pour $x = 2$ qui vaut $f(2) = 5$

2°) a) b) et c)

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ à dénominateur non nul

$u(x) = x^2 + x + 9$ $\qquad$ $u'(x) = 2x + 1$

$v(x) = x + 1$ $\qquad$ $v'(x) = 1$

$\forall x \in]0,+\infty[$ $\quad f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+9)}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{2x^2 + 2x + \cancel{x} + 1 - x^2 - \cancel{x} - 9}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$

Pour étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$ on étudie le signe de $f'(x)$

Etude de $x^2 + 2x - 8$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 = 6^2$

Il y a 2 racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-6}{2} = -4$ et $x_2 = 2$

Le trinôme est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines

x	0		2		$+\infty$
x^2+2x-8		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	|	$+$	
signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
variations de f	||	$\searrow$	5	$\nearrow$	

La conjecture est vérifiée