Exercice type

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Montrer que f admet 2 extrema locaux sur $\mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Etude du signe de $x^2 - 1$

$\Delta = 4$ Il y a 2 racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$

Le trinôme est du signe de $a = 1$ (positif) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
variation de f		↗	-2	↘	||	↘	2	↗	

$f'(x)$ s'annule et change de signe en -1 et en 1

donc elle admet 2 extrema locaux pour $x = -1$ et pour $x = 1$:

un maximum local en -1 qui vaut $f(-1) = -2$

un minimum local en 1 qui vaut $f(1) = 2$