

Exercice type

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Montrez que f admet 2 extrema locaux sur \mathbb{R}^*

f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Etude du sign de $x^2 - 1$

$\Delta = 4$ Il y a 2 racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$

Le trinôme est de signe de $a = 1$ (positif) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	+	0	-	-	0	+
x^2	+	+	0	+	+	+
sign de $f'(x)$	+	0	-	-	0	+
variation de f		\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow	

Diagramme de variation de la fonction f :
- Pour $x < -1$, la fonction est croissante.
- En $x = -1$, elle atteint un maximum local de valeur -2 .
- Pour $-1 < x < 1$, elle est décroissante.
- En $x = 1$, elle atteint un minimum local de valeur 2 .
- Pour $x > 1$, elle est croissante.

$f'(x)$ s'annule et change de signe en -1 et en 1
donc elle admet 2 extrema locaux pour $x = -1$ et
pour $x = 1$:

un maximum local en -1 qui vaut $f(-1) = -2$

un minimum local en 1 qui vaut $f(1) = 2$