Variations et inégalités

ex 56 $f(x) = x^3 - 1$ sur $[0, 3]$

1°) et 2°) f est dérivable sur $[0,3]$ (fonction de référence)

$\forall x \in [0,3] \quad f'(x) = 3x^2$

Pour étudier les variations de f on étudie le signe de $f'(x)$

x	0		3
signe de $f'(x)$	0	$+$	
variations de f	-1	$\nearrow$	26

3°) $0 \leq x \leq 3$

$\Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(3)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[0,3]$

$\Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 26$

ex 57 : $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2+9}$ sur $[-100 ; 100]$

1°) g est dérivable sur $[-100 ; 100]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[-100 ; 100]$ à dénominateur non nul

$u(x) = x - 4 \qquad u'(x) = 1$

$v(x) = x^2 + 9 \qquad v'(x) = 2x$

$\forall x \in [-100 ; 100]$

$$g'(x) = \frac{1(x^2+9) - 2x(x-4)}{(x^2+9)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 8x + 9}{(x^2+9)^2}$$

Pour étudier les variations de g, on étudie le signe de $g'(x)$

→ pour $-x^2+8x+9$

$\Delta = ..$ Il y a 2 racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 9$

Le trinôme est du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines

x	-100		-1		9		100
$-x^2+8x+9$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+9)^2$		$+$	|	$+$	|	$+$	
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de g	$-0,01$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{18}$	↘	$0,005$

2°) D'après le tableau de variation, f admet pour minimum $-\frac{1}{2}$ et pour maximum $\frac{1}{18}$ sur $[-100;100]$ Ces extrema sont atteints pour $x = -1$ (minimum) et $x = 9$ (maximum).

On a donc $\forall x \in [-100,100]$ $g(-1) \leq g(x) \leq g(9)$

$\iff -\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{1}{18}$

ex 59 1°) V est dérivable sur $[0;20]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[0,20]$ à dénominateur non nul

$V(t) = \frac{70}{0,5t+1}$

$u(t) = 0,5t+1$ $u'(t) = 0,5$

$\forall t \in [0,20]$ $V'(t) = 70 \times \frac{-0,5}{(0,5t+1)^2} = \frac{-35}{(0,5t+1)^2}$

t	0		20
-35		$-$	
$(0{,}5t+1)^2$		$+$	
signe de $V'(t)$		$-$	
variations de V	70	$\searrow$	$\frac{70}{11}$

2°) 2000 euros = 20 centaines d'euros.

Il doit vendre sa machine du temps que $V(t) \geq 20$

$V(t) \geq 20$

$\Leftrightarrow \dfrac{70}{0{,}5t+1} \geq 20$

$\Leftrightarrow \dfrac{70}{20} \geq 0{,}5t+1$ car $t \in [0,20]$ donc $0{,}5t+1 > 0$

$\Leftrightarrow 3{,}5 \geq 0{,}5t+1$

$\Leftrightarrow 2{,}5 \geq 0{,}5t$

$\Leftrightarrow 5 \geq t$

Il doit vendre sa machine au maximum 5 ans après l'achat.