III Propriétés du produit scalaire

Rappel : 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\boxed{\text{ssi}}$ $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

On a alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\frac{\pi}{2}$ ou $\cos(-\frac{\pi}{2})$

$= 0$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Propriété 1 : 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\boxed{\text{ssi}}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

propriété fondamentale du produit scalaire

Remarques :

- On retrouve la propriété que l'on avait constaté lors du calcul du produit scalaire avec la projection orthogonale
- Le vecteur nul a pour norme 0 donc pour tout vecteur $\vec{u}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$ et $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs

Notation : Soit $\vec{u}$ un vecteur $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$

Propriété 2 : Soit $\vec{u}$ un vecteur, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}})$

$= \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0$

$= \|\vec{u}\|^2 \times 1 = \|\vec{u}\|^2$.

Propriété 3 :

Le produit scalaire est bilinéaire symétrique

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ symétrique

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ distributivité à gauche et à droite

et $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$

3. Pour tout réel k

$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

bilinéaire

Démonstration

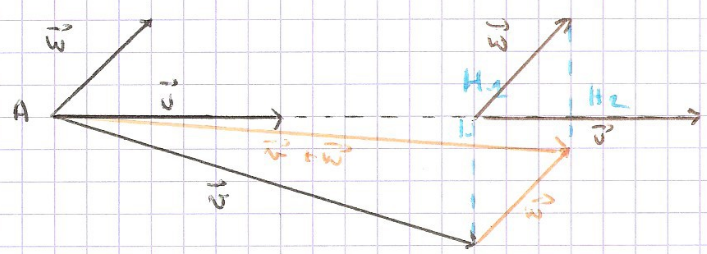
1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}\right)$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right)$

or $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right)$ donc $\cos\left(\left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}\right)\right) = \cos\left(\left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right)\right)$

Conclusion : On a bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. Démonstration géométrique



On a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AH_1} = \|\vec{u}\| \times AH_1$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{H_1H_2} = \|\vec{u}\| \times H_1H_2$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AH_2} = \|\vec{u}\| \times AH_2$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \times AH_1 + \|\vec{u}\| \times H_1H_2$

$= \|\vec{u}\| \times (AH_1 + H_1H_2)$

$= \|\vec{u}\| \times AH_2 = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

On peut utiliser le même raisonnement dans tous les cas de figure

3. Rappels : • $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

• $|k| = \begin{cases} k & \text{si } k \geq 0 \\ -k & \text{si } k < 0 \end{cases}$

• $(\vec{u}, k\vec{v}) = (k\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} (\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } k > 0 \\ \pi + (\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } k < 0 \end{cases}$

• $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ (configuration de rectangle)

si $k > 0$ $|k| = k$

$\vec{u} \cdot k\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, k\vec{v}})$

$= \|\vec{u}\| \times k \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

$k\vec{u} \cdot \vec{v} = \|k\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}})$

$= k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

si $k < 0$ $|k| = -k$

$\vec{u} \cdot k\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, k\vec{v}})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k) \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi + (\vec{u}, \vec{v}))$

$= -k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-\cos(\vec{u}, \vec{v})) = k \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$= k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

$k\vec{u} \cdot \vec{v} = \|k\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = -k \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi + (\vec{u}, \vec{v}))$

$= -k \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Conséquence :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

$= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2$

$= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

$\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

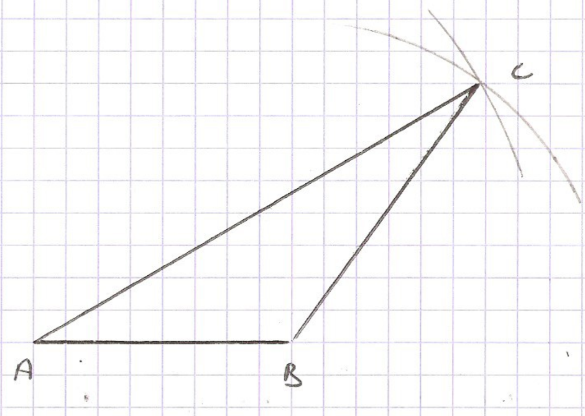
$\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété 4 : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

exemple : ABC est un triangle tel que $AB = 4$ $BC = 5$ et $AC = 8$

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$



On utilise la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{AB}+\vec{BC}\|^2 - \|AB\|^2 - \|BC\|^2\right)$

CHASLES

$= \frac{1}{2}\left(\|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|BC\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(8^2 - 4^2 - 5^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(64 - 16 - 25\right) = \frac{23}{2}$