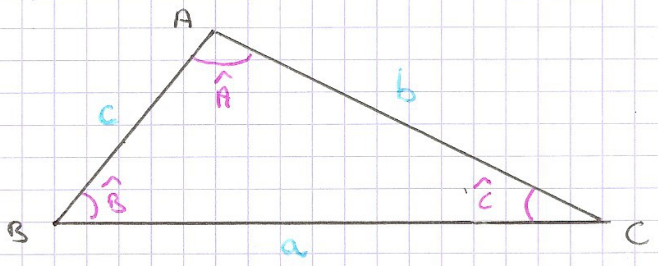
IV Calcul de longueurs et d'angle

1°) Formule d'Al-kashi

Soit ABC un triangle quelconque

On note $\hat{A} = \widehat{BAC}$; $\hat{B} = \widehat{ABC}$ et $\hat{C} = \widehat{ACB}$

$a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$



On veut calculer la distance BC.

on calcule BC^2

$$BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 \quad \text{Chasles}$$
$$= (\vec{AC} - \vec{AB})^2$$
$$= \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\,\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$
$$= AC^2 + AB^2 - 2\, AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

Propriété : Formule d'Al-kashi

Soit ABC un triangle quelconque, on a

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\, AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC})$

Avec les notations du dessin ci-dessus on obtient

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$

Remarque : Identités remarquables et produit scalaire

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

2°) Cercle et triangles rectangles

Rappel : Définition du cercle

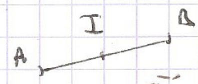
Un point M est un point du cercle de centre I et de rayon R $\Leftrightarrow$ $MI = R$

Exercice : Soient A et B deux points distincts du plan.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ $\quad$ $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont orthogonaux

$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ $\qquad$ Soit I le milieu de $[AB]$

$\Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = 0$



$\vec{IA} = -\vec{IB}$

$\Leftrightarrow \vec{MI}^2 + \vec{MI} \cdot \vec{IB} + \vec{IA} \cdot \vec{MI} + \vec{IA} \cdot \vec{IB} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MI}^2 + \vec{MI} \cdot \underbrace{(\vec{IB} + \vec{IA})}_{= \vec{0}} - \vec{IB}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MI}^2 - \vec{IB}^2 = 0$

$\Leftrightarrow MI^2 = IB^2 \Leftrightarrow MI = IB$

Conclusion : M est sur le cercle de centre I et de rayon IB autrement dit sur le cercle de diamètre $[AB]$

Propriété : Soient A et B deux points distincts du plan

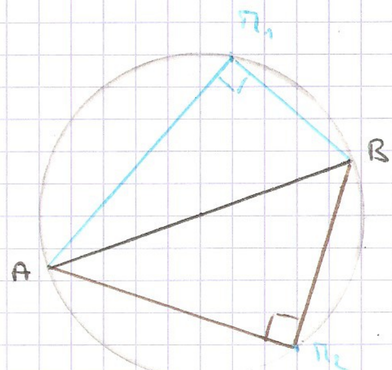
L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

Autre formulation : Soient A, B et M 3 points du plan

Le triangle ABM est rectangle en M

$\Leftrightarrow$ M est un point du cercle de diamètre $[AB]$

(A et B exclus)



Remarque : Dans l'exercice, on a trouvé

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IB}^2$$

Or on a I milieu de [AB] donc $IB = \frac{1}{2} AB$

donc $IB^2 = \frac{1}{4} AB$

D'où la propriété suivante.

Propriété :

Soient A et B deux points distincts du plan

soit I le milieu de [AB]

Pour tout point M du plan on a

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$$