LA FONCTION EXPONENTIELLE

I Notion d'équation différentielle

Définition :

Une équation différentielle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, notée y, dérivable sur son ensemble de définition.

Remarque :

On utilise la lettre y pour la fonction inconnue, en référence à l'équation de la courbe représentative d'une fonction : $y = f(x)$

exemples :

- $y' = 0$ s'écrit aussi : $y'(x) = 0$

Résoudre $y' = 0$, c'est chercher toutes les fonctions f ou y dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est la fonction constante nulle.

D'après les tableaux de dérivation, on sait que toutes les fonctions constantes sont solutions de cette équation.

on a donc $y' = 0 \iff y(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$

- $y' = 2x$ s'écrit aussi $y'(x) = 2x$

On cherche donc toutes les fonctions y dont la dérivée est $y'(x) = 2x$

Grâce aux formules et tableaux de dérivation, on sait que la fonction carré convient.

En effet si on note $f_1(x) = x^2$ on a $f_1'(x) = 2x$

Mais ce n'est pas la seule fonction qui convient !

Prenons $f_2(x) = x^2 + 3$ on obtient $f_2'(x) = 2x + 0 = 2x$

Donc f_2 est aussi une solution de cette équation différentielle

En fait on remarque qu'en ajoutant n'importe quelle constante à la fonction carré, on obtient une nouvelle solution de l'équation différentielle.

Il y a donc une infinité de solution.

Remarque : Vocabulaire

Si on note g la fonction définie par $g(x) = 2x$

On dit que $f_1, f_2, \dots$ sont des primitives de la fonction g

(notion développée en terminale)

- $y' = y$ s'écrit aussi $y'(x) = y(x)$

On cherche une fonction y, dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est elle-même sa propre dérivée

On en connait une : $f(x) = 0$ càd la fonction constante nulle

mais il pourrait y en avoir d'autre

Par la suite, nous allons nous intéresser à cette équation différentielle $y' = y$ et nous allons chercher une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie une condition initiale qui est $y(0) = 1$.