II Equation $y' = y$ avec $y(0) = 1$. MÉTHODE D'EULER

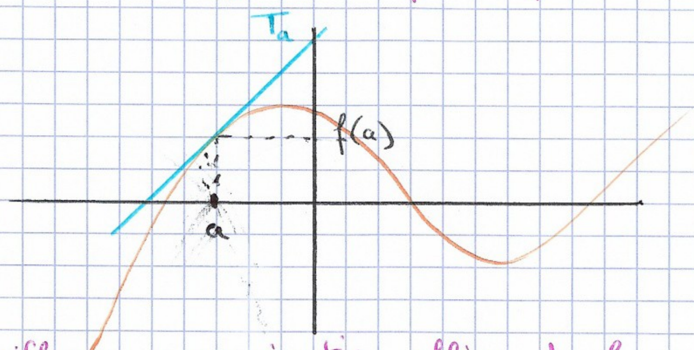
- Supposons que f soit une solution de l'équation $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$. (on appelera (E) cette équation)
  On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

- On cherche à tracer une courbe représentative qui s'approche de celle de la fonction f.

- Pour cela, on utilise la méthode d'EULER :
  On procède par approximations affines successives sur des intervalles du type $[n, n+1]$ $n \in \mathbb{Z}$

Propriété (admise) :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Soit $a \in I$. Soit C_f la représentation graphique de f
Soit T_a la tangente à C_f au point d'abscisse a



La meilleure approximation affine de f au voisinage de a est la fonction affine g dont la représentation graphique est T_a
on a donc $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$

Cela signifie que, au voisinage de a, on peut remplacer f par g (ou remplacer C_f par T_a)
L'erreur commise est minimale en prenant la tangente.

Copyright : ©Programmaths 2020

Mise en oeuvre de la méthode d'EULER

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

On a donc 1 point de la courbe représentative : $A(0,1)$

→ Sur $[0,1]$

La tangente à C_f au point A d'abscisse 0 a pour équation

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 0$, $f(a) = f(0) = 1$

et $f'(a) = f'(0) = f(0) = 1$

$\Leftrightarrow y = 1(x-0) + 1$

$\Leftrightarrow y = x + 1$

donc sur $[0,1]$ on obtient $f(x) \simeq x+1$ approximation affine

donc $f(1) \simeq 1+1 = 2$

On obtient donc un 2ème point : $A_1(1;2)$

<u>Attention</u>: Il y a une erreur commise par l'approximation

→ sur $[1;2]$

La tangente à C_f au point A_1 a pour équation

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 1$, $f(a) = f(1) = 2$

$\Leftrightarrow y = 2(x-1) + 2$ et $f'(a) = f(a) = f(1) = 2$

$\Leftrightarrow y = 2x$

donc sur $[1,2]$ $f(x) \simeq 2x$ donc $f(2) \simeq 4$

$\Rightarrow$ Nouveau point $A_2(2;4)$

→ sur $[2;3]$ La tangente à C_f en A_2 a pour équation

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 2$, $f(a) = f(2) = 4$

$\Leftrightarrow y = 4(x-2) + 4$ et $f'(a) = f'(2) = f(2) = 4$

$\Leftrightarrow y = 4x - 4$

donc sur $[2,3]$ $f(x) \simeq 4x-4$ donc $f(3) \simeq 8$

$\Rightarrow$ nouveau point $A_3(3;8)$

→ Cas général : sur $[n, n+1]$

On a calculé les coordonnées du point $A_n(n, f(n))$

La tangente à C_f au point A_n d'abscisse n a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \text{avec} \quad a = n \quad , f(a) = f(n)$$

$$\iff y = f(n)(x-n) + f(n) \quad \text{et } f'(a) = f'(n) = f(n)$$

donc sur $[n, n+1]$, $f(x) \simeq f(n)(x-n) + f(n)$

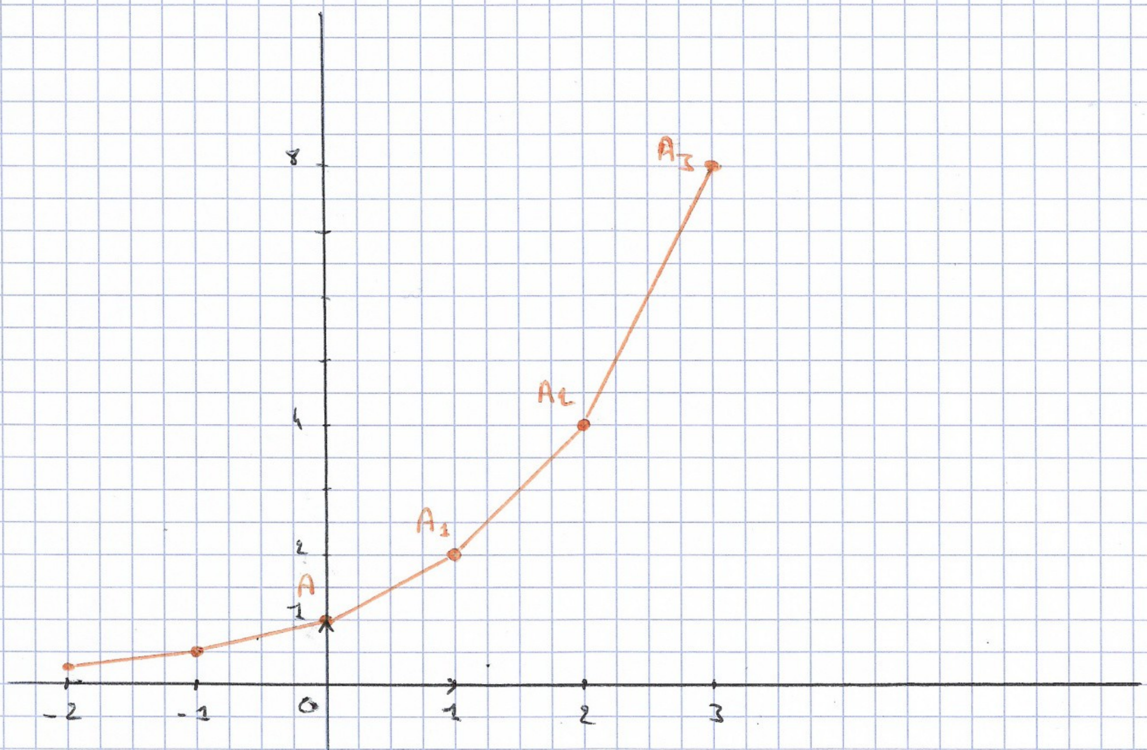
donc $f(n+1) \simeq f(n)(\cancel{n}+1-\cancel{n}) + f(n) = 2f(n)$

on a donc $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n+1) = 2f(n)$

$$\iff f(n) = \frac{1}{2} f(n+1)$$

donc $f(-1) = \frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$f(-2) = \frac{1}{2} f(-1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



Remarque : Si on diminue l'amplitude des intervalles, Alors l'erreur commise diminue et on s'approche de plus en plus de la courbe représentative de f qui est la fonction exponentielle

Copyright : ©Programmaths 2020