III Résolution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$ - La fonction exponentielle

1°) Complément de dérivation

Propriété : (admise en 1ère démontrée en terminale)

- Soit u, une fonction définie et dérivable sur un intervalle I
- Soient a et b 2 réels
- Soit J l'intervalle tel que $\forall x \in J$, $ax+b \in I$

La fonction f définie sur J par $f(x) = u(ax+b)$ est dérivable sur J et on a

$$\forall x \in J \quad f'(x) = \left(u(ax+b)\right)' = a\,u'(ax+b)$$

exemples :

- $f(x) = \sqrt{3x-6}$ sur $]2;+\infty[$ — composée de la fct° affine suivie de la racine carrée

  f est dérivable sur $]2;+\infty[$ et on a

  $$\forall x \in]2;+\infty[\quad f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-6}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-6}}$$

- $f(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$

  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4 \times \left(-\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = -4\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Remarque :

- Vocabulaire : On dit que $f(x) = u(ax+b)$ est la composée de la fonction affine suivie de la fonction u

- Dans le cas particulier où $a = -1$ et $b = 0$ on obtient

$$\left(u(-x)\right)' = -u'(-x)$$

2°) Equation $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$

La méthode d'Euler permet de faire la conjecture suivante :

Il semble que l'équation $y' = y$ avec $y(0) = 1$ possède au moins une solution.

Par la suite, on admet cette conjecture

Propriété : $\boxed{\text{Si}}$ f est une solution de l'équation $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$.

$\boxed{\text{Alors}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \times f(-x) = 1$

et $f(x) \neq 0$

Démonstration :

f est solution de l'équation donc

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)f(-x)$

On veut montrer que cette fonction h est constante égale à 1

Il faut donc montrer que $h'(x) = 0$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables

$u(x) = f(x)$ $\qquad u'(x) = f'(x) = f(x)$

$v(x) = f(-x)$ $\qquad v'(x) = -f'(-x) = -f(-x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $h'(x) = u'v + uv' = f(x)f(-x) + f(x) \times (-f(-x))$

$= 0$

Donc h est une fonction constante

De plus $h(0) = f(0) \times f(-0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x) = 1 \iff f(x)f(-x) = 1$

Par ailleurs, s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$

Alors on aurait $h(a) = f(a) \times f(-a) = 0 \times f(-a) = 0$ IMPOSSIBLE

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq 0$

Propriété _ Définition

- L'équation $y' = y$ avec $y(0) = 1$ possède une unique solution
- Cette unique solution est la fonction exponentielle notée exp.

Démonstration de l'unicité

f est une solution : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

Supposons qu'il existe une autre solution g telle que

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$

Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables à dénominateur non nul.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{(g(x))^2}$$

$$= 0$$

Donc h est une fonction constante

De plus $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

D'où l'unicité.