IV Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 1 : Conséquences immédiates de la définition

- $\exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) \neq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(x)\exp(-x) = 1$

Propriété 2 : Relation fonctionnelle (fondamentale)

Pour tous réel a et b on a

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Démonstration :

Soit a un réel quelconque.

Soit h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$

h_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables à dénominateur non nul.

$u(x) = \exp(a+x)$ $\qquad$ $u'(x) = 1 \times \exp'(a+x) = \exp(a+x)$

$v(x) = \exp(x)$ $\qquad$ $v'(x) = \exp'(x) = \exp(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'_a(x) = \frac{\exp(a+x)\exp(x) - \exp(a+x) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

Donc h_a est une fonction constante

et on a de plus $h_a(0) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)} = \exp(a)$

$$\Leftrightarrow \exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$$

Comme a est quelconque, la propriété est démontrée.

exemple d'utilisation

- $\exp(7) = \exp(3+4) = \exp(3) \times \exp(4)$
- $\exp(x^2+3x-5) = \exp(x^2) \times \exp(3x-5)$

Copyright : ©Programmaths 2020

propriété 3 Propriétés algébriques

1°) $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

2°) $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

3°) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

4°) $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp(na) = [\exp(a)]^n$ (Admis En 4ème démontré en terminale)

Démonstration :

1) voir propriété 2

2) D'après la propriété 1

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \Leftrightarrow \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

car $\exp(x) \neq 0$

3) $\exp(a-b) = \exp(a+(-b)) \underset{(1)}{=} \exp(a) \times \exp(-b)$

(2) $\rightarrow = \exp(a) \times \dfrac{1}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

propriété 4 :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$

Démonstration

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$

(1) $\rightarrow = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right)$

$= \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$

Un carré est toujours positif et $\exp\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$

on a donc $\exp(x) > 0$