VIII Approximation affine au voisinage de 0

Rappel du II

La meilleure approximation affine d'une fonction f en a est la fonction affine dont la droite représentative est la tangente à C_f au point d'abscisse a.

Ici on a $a = 0$ $\quad f(x) = \exp(x)$

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $\quad$ avec $f(0) = \exp(0) = 1$

$\Leftrightarrow y = 1(x-0) + 1$ $\quad$ et $f'(0) = \exp'(0) = \exp(0) = 1$

$\Leftrightarrow y = x + 1$

Donc, au voisinage de 0 on a $\exp(x) \simeq x + 1$

Remarque :

On a $\exp'(0) = 1$

donc d'après la définition du nombre dérivé on peut écrire :

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1}$$

Cette limite est une limite remarquable qui sera exploitée en terminale

Etude de la position relative de la courbe et de la tangente

La courbe C_f a pour équation : $y = f(x) = y = e^x$

la tangente T au point d'abcisse 0 a pour équation : $y = x + 1$

Pour étudier la position relative de C_f et de T,

on étudie le signe de $f(x) - (x+1)$

$f(x) - (x+1) = e^x - (x+1) = e^x - x - 1$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x - 1$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = e^x - 1$

Pour étudier le signe de $h'(x)$, on résout une inéquation

$e^x - 1 > 0$ On cherche quand est-ce qu'on met un signe "+" dans le tableau de signes

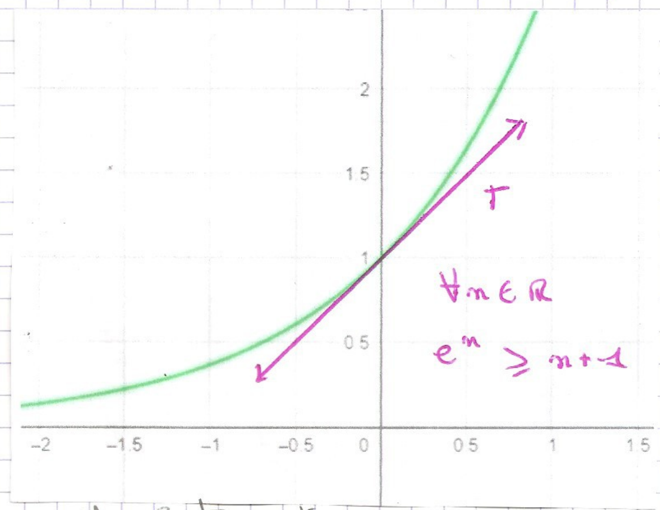
$\Leftrightarrow e^x > 1$

$\Leftrightarrow e^x > e^0$

$\Leftrightarrow x > 0$

On met un signe "+" dans le tableau de signes pour $e^x - 1$ quand $x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h		$\searrow$	0	$\nearrow$	
signe de $h(x)$		$+$	0	$+$	



Conclusion : C_f est toujours au dessus de la tangente.