4°) Théorèmes de logique

Définition :

Un théorème de logique (appelé aussi tautologie) est une assertion vraie quelles que soient les valeurs de vérité des éléments qui la composent.

Exemples : 1) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \text{ ou } q)$

Démonstration : Avec une table de vérité

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p$ ou q	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p$ ou $q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

2) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ principe de contre-apposition

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

On dit que $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ est la contraposée de $p \Rightarrow q$

Tautologies les plus utiles

- $(p \text{ ou } p) \Leftrightarrow p$
- $(p \text{ et } p) \Leftrightarrow p$
- $p \text{ ou } \neg p$
- $\text{non } (p \text{ et } \neg p)$
- $p \Rightarrow p$
- $p \Leftrightarrow p$
- $(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$

- $(p \text{ et } (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ règle d'inférence ou syllogisme

  principe philosophique

- $(\neg (p \text{ ou } q)) \Leftrightarrow (\neg p \text{ et } \neg q)$ négation d'un ou
- $(\neg (p \text{ et } q)) \Leftrightarrow (\neg p \text{ ou } \neg q)$ négation d'un et
- $(\neg (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \text{ et non } q)$ négation d'une implication
- $((p \text{ et } q) \text{ et } r) \Leftrightarrow (p \text{ et } (q \text{ et } r))$ associativité de et
- $((p \text{ ou } q) \text{ ou } r) \Leftrightarrow (p \text{ ou } (q \text{ ou } r))$ associativité de ou
- $((p \text{ et } q) \text{ ou } r) \Leftrightarrow ((p \text{ ou } r) \text{ et } (q \text{ ou } r))$ distributivité de ou
- $((p \text{ ou } q) \text{ et } r) \Leftrightarrow ((p \text{ et } r) \text{ ou } (q \text{ et } r))$ sur et, et de et sur ou
- $((p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ transitivité de l'implication

5°) Raisonnement par l'absurde.

Pour montrer que $p \Rightarrow q$, on suppose que p est vraie et que q est fausse. (on suppose donc que (p et $\neg q$) est vraie) et on montre que l'on aboutit à une contradiction.

On a donc montré que p et $\neg q$ est fausse

$\Leftrightarrow$ non (p et $\neg q$) est VRAIE

$\Leftrightarrow$ $\neg p$ ou q est VRAIE

$\Leftrightarrow$ $p \Rightarrow q$ est VRAI