III Langage mathématique des ensembles

1°) Vocabulaire et notations

Définition : Un ensemble est une collection d'objets

Exemples :

- $E = \{0, 1, 3\}$
- $F = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 4\}$ ensemble des réels supérieurs ou égaux à 4

Notations :

- $x \in E$ signifie " x appartient à l'ensemble E " ou " x est élément de l'ensemble E "
- La négation de $x \in E$ est notée $x \notin E$
  $\neg(x \in E) \Leftrightarrow x \notin E$
- $\emptyset$ est l'ensemble vide. C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément
- Un ensemble ayant 1 élément et 1 seul est un singleton

2°) Les quantificateurs

Il existe 2 quantificateurs

→ le quantificateur universel $\forall$ se lit " Pour tout " ou " Quel que soit "

→ le quantificateur existentiel $\exists$ qui se lit " il existe au moins un élément "

Remarque :

- Souvent, on a besoin de traduire conjointement l'existence et l'unicité
  → On note $\exists!$ pour " il existe un et un seul élément "
- la lettre affectée par un quantificateur est muette : elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre n'ayant pas déjà une signification

Exemples de phrase quantifiée

- $(\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y)$ qui se traduit par :

→ lecture littérale :

Pour tout entier naturel n, il existe au moins un entier naturel y tel que $n \leq y$

→ lecture améliorée

Pour tout entier naturel n on peut trouver au moins 1 entier naturel y qui lui est supérieur

Cette phrase quantifiée est VRAI

- $(\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x \leq y)$

→ lecture littérale :

Il existe au moins un entier naturel y tel que, pour tout entier naturel x, on a $x \leq y$

→ lecture améliorée

Il existe au moins un entier naturel qui est supérieur à tous les autres

Cette phrase quantifiée est FAUSSE

Remarque importante

On constate au travers de ces deux exemples que l'on ne peut pas a priori modifier l'ordre des quantificateurs

Négation d'une phrase quantifiée

Proposition :

- $(\text{non}\ (\forall x \in E,\ P(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \text{non}\ P(x))$
- $(\text{non}\ (\exists x \in E,\ P(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \text{non}\ P(x))$

Remarques :

- la négation de $\forall$ est $\exists$ et réciproquement
- La première negation indique que pour montrer qu'une propriété est fausse, il faut trouver un contre-exemple

exemple :

$(\text{non}\ (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0)) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0)$

si $x = 0$ on a $x^2 \leq 0$ donc $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0)$ est FAUSSE

Proposition :

- Toute phrase commençant par $\exists x \in \emptyset$ est FAUSSE
- Toute phrase commençant par $\forall x \in \emptyset$ est VRAIE