3°/ Inclusion (Règles de calcul dans $\mathcal{P}(E)$)

Définition

Soient E et F deux ensembles

On dit que
- F est inclus dans E ISSI $\forall x \in F,\ x \in E$
- ou F est une partie de E
- ou E contient F

et on note $F \subset E$ " F est inclus dans E "

$E \supset F$ " E contient F " ou " E inclut F "

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E

Exemple : $E = \{1, 2, 3\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles

Notations :

- On note $F \subsetneq E$ pour ($F \subset E$ et $F \neq E$)
- On note $F \not\subset E$ pour non ($E \subset F$)

Remarque : Attention à ne pas confondre les 2 notations

↳ Ecriture quantifiée :

- $F \subsetneq E \iff \begin{cases} \forall x \in F,\ x \in E \\ \exists x \in E,\ x \notin F \end{cases}$
- $F \not\subset E \iff \exists x \in F,\ x \notin E$

Propriétés de l'inclusion

- $E = F \iff (E \subset F$ et $F \subset E)$
- $E \neq F \iff (E \not\subset F$ ou $F \not\subset E)$
  $\iff (\exists x \in E, x \notin F)$ ou $(\exists y \in F, y \notin E)$
- $\emptyset \subset E$, $E \subset E$
- $\begin{cases} E \subset F \\ F \subset G \end{cases} \Rightarrow E \subset G$ transitivité de l'inclusion

Conséquences : MÉTHODES DE DÉMONSTRATION

- Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on peut montrer une double inclusion
- Pour montrer que deux ensembles sont distincts, il suffit de trouver un élément de l'un qui n'appartient pas à l'autre.

Exercice : Soient E et F deux ensembles
E est un ensemble de stylos et F un ensemble de voiture
On peut écrire que $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et que $\emptyset \in \mathcal{P}(F)$
Mais s'agit-il du même ensemble vide ?

Notons $\emptyset_E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset_F \in \mathcal{P}(F)$

$(\forall x \in \emptyset_E, x \in \emptyset_F)$ est toujours vraie.
$\iff \emptyset_E \subset \emptyset_F$

D'autre part
$(\forall x \in \emptyset_F, x \in \emptyset_E)$ est toujours vraie
$\iff \emptyset_F \subset \emptyset_E$

Conclusion : $\emptyset_E = \emptyset_F$.

4°) Opérations dans $\mathcal{P}(E)$ (avec les diagramme de VENN)

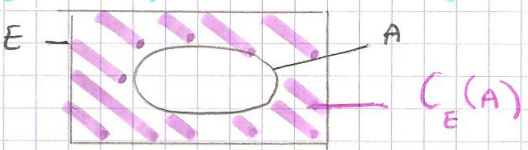
Définition

Soit E un ensemble et soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$

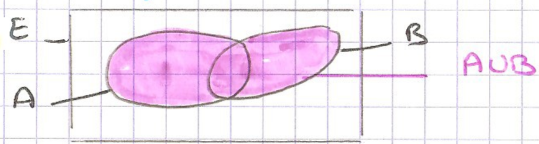
On définit les parties suivantes de E

1°) $C_E(A) = \{x \in E, x \notin A\}$ complémentaire de A dans E

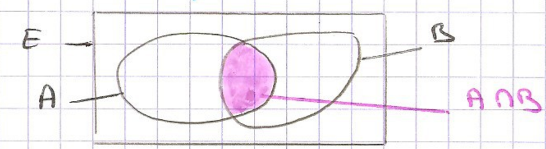
noté $\bar{A}$ si il n'y a pas de confusion possible



2°) $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$ réunion de A et B

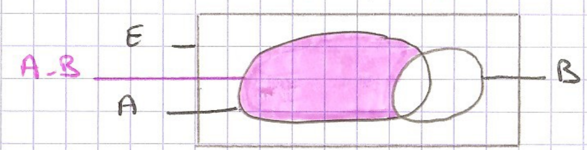


3°) $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$ Intersection de A et B



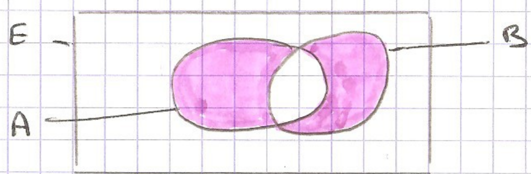
4°) $A - B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\}$ différence $A - B$

noté aussi $A \setminus B$



5°) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ différence symétrique de A et B

Il s'agit aussi du "ou exclusif"



Propriété : Deux ensembles E et F sont disjoints $\boxed{\text{ssi}}$ $F \cap G = \emptyset$

Attention : Ne pas confondre E et F disjoints avec $E \neq G$