6°) Exemple de calcul ensembliste

Montrer que $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

Méthode :

Pour travailler sur les ensembles, il y a 2 pistes possibles

1°) On calcule globalement avec les ensembles en utilisant les propriétés des opérations sur les ensembles

2°) On passe par les éléments des ensembles

Rq : La 1ère méthode est souvent plus courte et plus claire. Elle sera donc à privilégier.

1ère méthode : En utilisant les propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

$A \cap B = A \cap C$

$\iff \overline{A \cap B} = \overline{A \cap C}$

$\iff \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{C}$

$\Rightarrow A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$ simple implication (voir Rq)

$\iff (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C})$

$\iff \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{C})$

$\iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

On a donc montré que $A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

Réciproquement

En appliquant la précédente implication avec $\overline{B}$ et $\overline{C}$ à la place de B et C, on obtient :

$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}} \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

Conclusion : On a bien montré l'équivalence

$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

Rq : si on prend

$A = \{\text{nombres pairs}\}$ $B = \{2;4;5\}$ et $C = \{2;4;5;7\}$

on a $A \cap B = \{2;4\}$ et $A \cap C = \{2;4\}$

On a bien $A \cap B = A \cap C$ mais $B \neq C$

On a donc juste une simple implication :

$B = C \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

2ème méthode : Avec les éléments

- $\Rightarrow$) On suppose que $A \cap B = A \cap C$

  et on montre alors que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

Pour montrer que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$, on va montrer une double inclusion

- $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$

Soit $x \in A \cap \overline{B} \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in \overline{B}$

On procède par disjonction des cas

→ si $x \in \overline{C}$ Alors $x \in A \cap \overline{C}$ fini

→ si $x \in C$ Alors $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$

On aboutit donc à une contradiction donc l'hypothèse de départ est fausse donc $x \notin C \Leftrightarrow x \in \overline{C} \Rightarrow x \in A \cap \overline{C}$

on a donc montré que $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$

- $A \cap \overline{C} \subset A \cap \overline{B}$

En échangeant $\overline{B}$ et $\overline{C}$ dans la démonstration précédente on obtient de la même façon cette deuxième inclusion.

- Réciproquement

  $\Leftarrow$) On procède de la même façon que dans la méthode 1