LES RELATIONS

I Généralités

1°) Les couples

Définition :
Un couple, c'est la donnée de 2 éléments dans un certain ordre. Ainsi $(x,y) \neq (y,x)$

Exemple : Couple de coordonnées d'un point
$A(2,3)$ et $B(3,2)$ sont distincts

Proposition : Egalité de deux couples

$$(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

2°) Produit cartésien de deux ensembles

Définition :
Soient E et F, deux ensembles.
On appelle "produit cartésien de E et F" l'ensemble noté $E \times F$ (se lit : "E croix F") défini par

$$E \times F = \{(x,y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Exemple : $E = \{1,2\}$ $F = \{a,b,c\}$
Lister les éléments de $E \times F$ et de $F \times E$

$E \times F = \{(1,a);(1,b)(1,c),(2,a)(2,b)(2,c)\}$

$F \times E = \{(a,1),(a,2),(b,1)(b,2),(c,1)(c,2)\}$

Remarques :

- Si E et F sont des ensembles finis $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$
- $E \times E$ est noté E^2
- On pourra écrire $\forall x,y \in E$ au lieu de $\forall (x,y) \in E^2$ pour prendre 2 éléments quelconques de E.
- a priori $E \times F \neq F \times E$

Proposition : propriétés élémentaires du produit cartésien

Pour tout ensemble E, F, G et H

1°) $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset$ ou $F = \emptyset)$

2°) $E \times F = F \times E \iff (E = F$ ou $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset)$

$$\left.\begin{array}{l} 3°)\ (E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G) \\ 4°)\ (E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F \end{array}\right\} \text{distributivité}$$

5°) $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

Remarque :

Il se peut que $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$

en effet, si on prend $E = F = \{0\}$ et $G = H = \{1\}$

on a alors

- $E \times F = \{(0,0)\}$ donc
  $G \times H = \{(1,1)\}$ $\quad (E \times F) \cup (G \times H) = \{(0,0), (1,1)\}$

- $E \cup G = \{0,1\}$ donc
  $F \cup H = \{0,1\}$ $\quad (E \cup G) \times (F \cup H) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Vocabulaire et notations

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des ensembles

- Tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est appelé un n-uplet

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est noté $\prod_{i=1}^{n} E_i$

- On obtient par extension de la notion d'égalité des couples

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \iff \forall i \in [1, n] \quad x_i = y_i$$