2°) Composée de deux relations

Définition :

Soient E, F et G trois ensembles

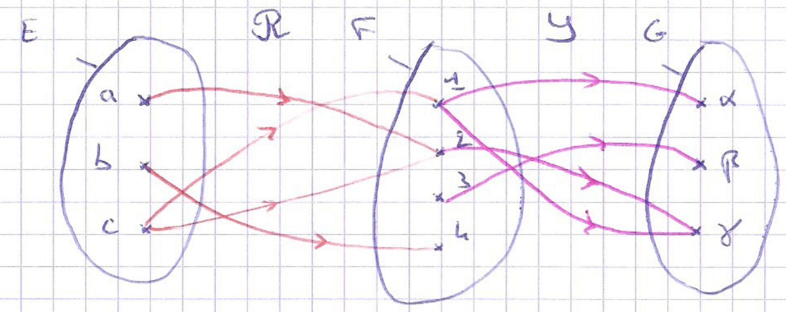
Soit $\mathcal{R}$ (respectivement $\mathcal{S}$) une relation de E vers F (respectivement de F vers G)

On définit la relation composée de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ (ou $\mathcal{R}$ suivie de $\mathcal{S}$) notée $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, de E vers G par :

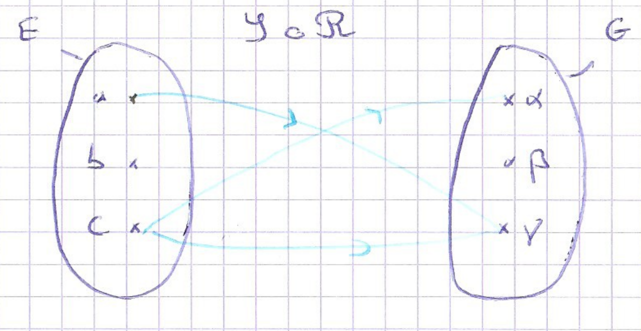
$$\forall (x;z) \in E \times G \quad x\, \mathcal{S} \circ \mathcal{R}\, z \iff \exists y \in F \text{ tq } \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{S} z \end{cases}$$

Exemples

1) Avec un diagramme sagittal.



On obtient alors



2) Si on prend $E = F = G$ = plan euclidien (géométrie plane)

$\mathcal{S} = \mathcal{R} = \perp$ on a alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = //$

car pour toutes droites D et D'' de $\mathcal{P}$

$$D // D'' \iff \exists D' \in \mathcal{P} \text{ tq } \begin{cases} D \perp D' \\ D' \perp D'' \end{cases}$$

Rq : $\mathcal{S} = \mathcal{R} = //$ alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = //$

Propriété :

La composition des relations est associative

Soient E, F, G et H quatre ensembles

Soit $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations respectivement de E vers F, de F vers G et de G vers H

$$(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$$

Démonstration

→ ensemble de départ et ensemble d'arrivée

$$E \xrightarrow{(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}} H$$

$$E \xrightarrow{\mathcal{R}} F \xrightarrow{(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})} H$$

$$E \xrightarrow{\mathcal{R}} F \xrightarrow{\mathcal{S}} G \xrightarrow{\mathcal{T}} H$$

$$E \xrightarrow{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} G \xrightarrow{\mathcal{T}} H$$

$$E \xrightarrow{\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})} H$$

donc $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$ ont même ensemble de départ et d'arrivée.

→ les graphes

$\forall (x, t) \in E \times H$

$$x \; (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} \; t \iff \exists y \in F \text{ tq } \begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{T} \circ \mathcal{S}\, t \end{cases}$$

$$\iff \exists y \in F, \exists z \in G \text{ tq } \begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{S}\, z \\ z \,\mathcal{T}\, t \end{cases}$$

$$\iff \exists z \in G \text{ tq } \begin{cases} x \,\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\, z \\ z \,\mathcal{T}\, t \end{cases}$$

$$\iff x \; \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \; t$$