

### 3e) Réciproque d'une relation

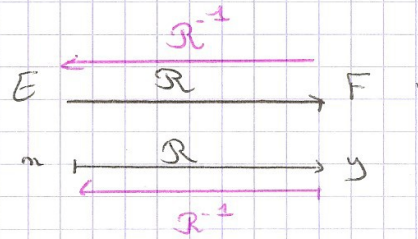
#### Définition:

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Soit  $R$  une relation de  $E$  vers  $F$ .

On définit la relation  $R^{-1}$ , réciproque de  $R$ , de  $F$  vers  $E$

par:  $\forall (x, y) \in E \times F, y R^{-1} x \Leftrightarrow x R y$

Rq: On peut visualiser cette définition de la façon suivante:



#### Propositions

1) Pour toute relation  $R$  on a  $(R^{-1})^{-1} = R$ .

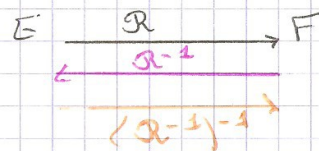
2) Soient  $E, F$  et  $G$  des ensembles.

Soit  $R$  une relation de  $E$  vers  $F$  et  $\gamma$  une relation de  $F$  vers  $G$ .

on a alors  $(\gamma \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ \gamma^{-1}$

#### Démonstration:

1°) Immédiat avec la définition.



donc  $(R^{-1})^{-1}$  et  $R$  ont

même ensembles de départ et d'arrivée

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad x (R^{-1})^{-1} y$$

$$\Leftrightarrow y R^{-1} x$$

$$\Leftrightarrow x R y$$

201 → Ensembles de départ et d'arrivée

$$E \xrightarrow{\mathcal{R}} F \xrightarrow{\mathcal{Y}} G$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Y} \circ \mathcal{R}}$$

$$\xleftarrow{(\mathcal{Y} \circ \mathcal{R})^{-1}}$$

$$E \xrightarrow{\mathcal{R}} F \xrightarrow{\mathcal{Y}} G$$

$$\xleftarrow{\mathcal{R}^{-1}} \quad \xleftarrow{\mathcal{Y}^{-1}}$$

$$\xleftarrow{\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{Y}^{-1}}$$

→  $\forall (x, z) \in E \times G$ ,

$$z \in (\mathcal{Y} \circ \mathcal{R})^{-1} x$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in F \text{ tel que } z = \mathcal{Y} \circ \mathcal{R}(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in F \text{ tel que } \begin{cases} z = \mathcal{R}(y) \\ y = \mathcal{Y}^{-1}(z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in F \text{ tel que } \begin{cases} y = \mathcal{R}^{-1}(z) \\ z = \mathcal{Y}(y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in F \text{ tel que } \begin{cases} z = \mathcal{Y}(y) \\ y = \mathcal{R}^{-1}(z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{Y}(x)$$