3°) Réciproque d'une relation

Définition :

Soient E et F deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation de E vers F.
On définit la relation $\mathcal{R}^{-1}$, réciproque de $\mathcal{R}$, de F vers E
par : $\forall (x,y) \in E \times F$, $y \mathcal{R}^{-1} x \Leftrightarrow x \mathcal{R} y$

Rq : On peut visualiser cette définition de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "\mathcal{R}"] & F \arrow[l, shift left, "\mathcal{R}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "\mathcal{R}"] & y \arrow[l, shift left, "\mathcal{R}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Propositions :

1) Pour toute relation $\mathcal{R}$ on a $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

2) Soient E, F et G des ensembles.
Soit $\mathcal{R}$ une relation de E vers F et $\mathcal{S}$ une relation de F vers G
on a alors $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$

Démonstration :

1°) Immédiat avec la définition.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left=2, "\mathcal{R}"] \arrow[r, shift right=2, "(\mathcal{R}^{-1})^{-1}"'] & F \arrow[l, "\mathcal{R}^{-1}" description] \end{tikzcd}$$

donc $(\mathcal{R}^{-1})^{-1}$ et $\mathcal{R}$ ont même ensembles de départ et d'arrivée

$\forall (x,y) \in E \times F$ $\quad x \, (\mathcal{R}^{-1})^{-1} \, y$

$\Leftrightarrow y \, \mathcal{R}^{-1} \, x$

$\Leftrightarrow x \, \mathcal{R} \, y$

2°) → Ensembles de départ et d'arrivée

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mathcal{R}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{S} \circ \mathcal{R}"'] & F \arrow[r, "\mathcal{S}"] & G \arrow[ll, bend right=60, "(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mathcal{R}"] & F \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[l, bend left, "\mathcal{R}^{-1}"] & G \arrow[l, bend left, "\mathcal{S}^{-1}"] \arrow[ll, bend left=60, "\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

→ $\forall (x, z) \in E \times G$,

$z \left(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}\right)^{-1} x$

$\Leftrightarrow x \ \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \ z$

$\Leftrightarrow \exists y \in F$ tel que $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{S} z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists y \in F$ tel que $\begin{cases} y \mathcal{R}^{-1} x \\ z \mathcal{S}^{-1} y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists y \in F$ tel que $\begin{cases} z \mathcal{S}^{-1} y \\ y \mathcal{R}^{-1} x \end{cases}$

$\Leftrightarrow z \ \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} \ x$