1°) Les relations binaires

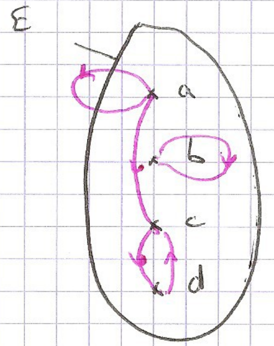
Définition :

Une relation $\mathcal{R}$ de E vers F est une relation binaire $\boxed{\text{ssi}}$ $E = F$

On dit alors que $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E

Rq : • Autrement dit, l'ensemble d'arrivée est le même que l'ensemble de départ

• avec un diagramme sagittal, cela donnera :



Définition :

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. (A est une partie de E, $A \subset E$)

La relation binaire dans A notée $\mathcal{R}_A$ et définie par

$\forall (x,y) \in A^2 \quad x \mathcal{R}_A y \iff x \mathcal{R} y$

est appelée "relation induite par $\mathcal{R}$ sur A" (ou dans A)

Exemples :

- La relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$ est une relation binaire dans $\mathbb{R}$
- La divisibilité dans $\mathbb{Z}$ est une relation binaire dans $\mathbb{Z}$

a divise $b \iff \exists c \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ac \quad (a \neq 0)$

- Dans $\mathcal{P}$ ensemble des nombres premiers ($\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$)

la relation de divisibilité donne : $p_1 /$

p_1 divise $p_2 \iff \exists c \in \mathbb{Z}$ tel que $p_2 = p_1 \times c$

$\Rightarrow c = 1$ sinon p_2 ne serait pas premier $\Rightarrow p_2 = p_1$

Conclusion : Dans $\mathcal{P}$, la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ induit l'égalité dans $\mathcal{P}$.

4 définitions très importantes pour les relations binaires

Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite

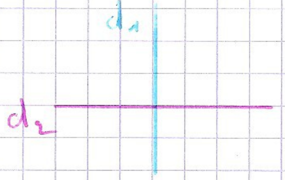
- Reflexive $\boxed{ssi}$ $\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x$
- symétrique $\boxed{ssi}$ $\forall (x,y) \in E^2 \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- antisymétrique $\boxed{ssi}$ $\forall (x,y) \in E^2 \quad \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \Rightarrow x = y$
- transitive $\boxed{ssi}$ $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow x \mathcal{R} z$

exemple 1: La relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$

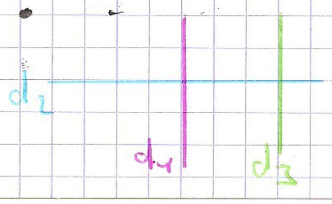
- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x \leq x$ $\Rightarrow$ reflexive.
- $3 \leq 4$ mais $4 \not\leq 3$ $\Rightarrow$ pas symétrique.
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x = y$ $\Rightarrow$ antisymétrique.
- $\forall x, y, z \quad \begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$

  transitive.

exemple 2: l'orthogonalité dans le plan euclidien $\mathcal{P}$

- Une droite n'est pas orthogonale à elle-même $\Rightarrow$ non reflexive
- $\forall d_1, d_2 \in \mathcal{P} \quad d_1 \perp d_2 \Rightarrow d_2 \perp d_1$ $\Rightarrow$ symétrique
- 

  on a $\begin{cases} d_1 \perp d_2 \\ d_2 \perp d_1 \end{cases}$ mais $d_1 \neq d_2$

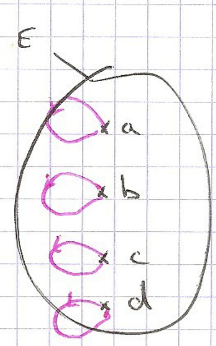
  $\Rightarrow$ Pas antisymétrique
- 

  $\begin{cases} d_1 \perp d_2 \\ d_2 \perp d_3 \end{cases}$ mais d_1 et d_3 ne sont pas orthogonales

  $\Rightarrow$ non transitive.

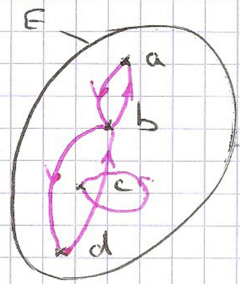
Interprétation avec les diagramme sagittaux

Reflexive.



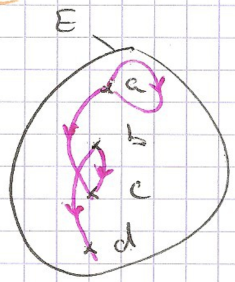
Il y a une boucle sur chaque élément de E

Symétrique.



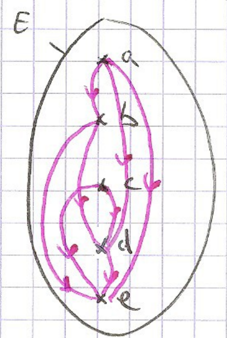
Il n'y a que des allers-retours et des boucles

Antisymétrique



Il n'y a que des allers simples et des boucles

Transitive



Tout trajet de plusieurs étapes peut se faire en une seule fois