5°) Exercice type :

Exercice 1 :

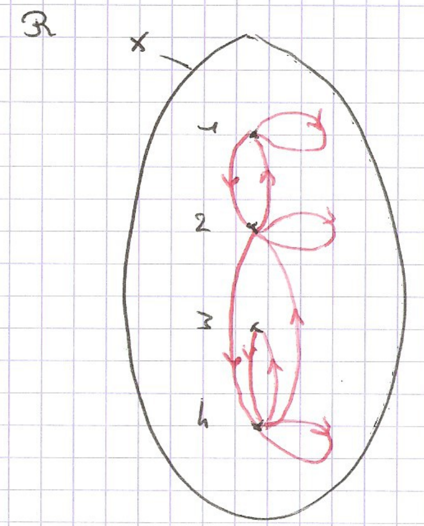
Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$

On considère la relation $\mathcal{R}$ sur X dont le graphe est l'ensemble $G = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

$\mathcal{R}$ est elle reflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

$\mathcal{R}$ est une relation binaire sur X.

↳ avec le diagramme sagittal.



Reflexivité :

$3 \in X$ et $3 \not\mathcal{R}\, 3$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas reflexive.

Symétrie : Il n'y a que des "allers, retours" donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

$\forall x, y \in X \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.

Antisymétrie :

On a $\begin{cases} 1 \mathcal{R} 2 \\ 2 \mathcal{R} 1 \end{cases}$ mais $1 \neq 2$

donc $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

Transitivité

On a $\begin{cases} 1 \mathcal{R} 2 \\ 2 \mathcal{R} 4 \end{cases}$ mais $1 \not\mathcal{R}\, 4$

donc elle n'est pas transitive.

Exercice 2 :

Soit P^* l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2

On considère la relation $\mathcal{R}$ sur P^* définie par :

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff \frac{p+q}{2} \in P^*$$

$\mathcal{R}$ est elle reflexive, symétrique, transitive ?

Reflexivité :

$\forall p \in P^* \quad \frac{p+p}{2} = p \in P^*$

$\Rightarrow \quad p \,\mathcal{R}\, p$

Conclusion $\mathcal{R}$ est reflexive

Symétrie

$\forall x, y \in P^* \quad x \,\mathcal{R}\, y$

$\iff \frac{x+y}{2} \in P^*$

$\iff \frac{y+x}{2} \in P^*$

$\iff y \,\mathcal{R}\, x$

Conclusion $\mathcal{R}$ est symétrique.

Transitive :

$11 \,\mathcal{R}\, 3$ car $\frac{11+3}{2} = \frac{14}{2} = 7 \in P^*$

et $3 \,\mathcal{R}\, 7$ car $\frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \in P^*$

mais $\frac{11+7}{2} = \frac{18}{2} = 9 \notin P^*$ donc $11 \not{\mathcal{R}}\, 7$

Conclusion : $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.