III Deux relations binaires fondamentales

1°) Relation d'équivalence

Définition :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans un ensemble E.
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence $\boxed{\text{ssi}}$ elle est réflexive symétrique et transitive.

Définition :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E.
Pour tout élément x de E on appelle " classe d'équivalence de x " (modulo $\mathcal{R}$) l'ensemble noté

$$Cl_{\mathcal{R}}(x) = \dot{x} = \{ y \in E \text{ tel que } x \mathcal{R} y \}$$

Vocabulaire :

- Tout élément de $\dot{x}$ est appelé un représentant de $\dot{x}$
- L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ est appelé l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ et il est noté $E/_{\mathcal{R}}$

exemples :

- La relation de parallélisme dans le plan euclidien $\mathcal{P}$

→ $\forall d \in \mathcal{P} \quad d \parallel d$ ⇒ réflexive

→ $\forall d_1, d_2 \in \mathcal{P} \quad d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_2 \parallel d_1$ symétrique

→ $\forall d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{P} \quad \begin{cases} d_1 \parallel d_2 \\ d_2 \parallel d_3 \end{cases} \Rightarrow d_1 \parallel d_3$ Transitive

Conclusion : c'est une relation d'équivalence.

Soit d une droite de $\mathcal{P}$: $\dot{d}$ est l'ensemble de droites de $\mathcal{P}$ parallèles à la droite d.

$\dot{d_1}$ est donc une direction (au sens des caractéristiques de vecteur)

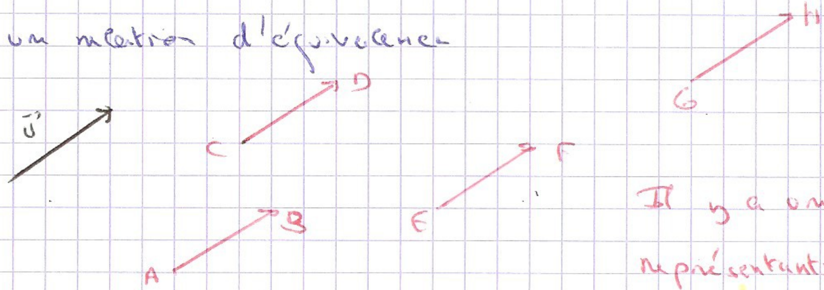
• l'égalité de vecteurs (même direction, même sens, même norme)

→ Pour tout vecteur $\vec{u}$ $\quad \vec{u} = \vec{u}$ réflexive

→ $\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}$ symétrique

→ $\begin{cases} \vec{u} = \vec{v} \\ \vec{v} = w \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \vec{w}$ Transitive

C'est une relation d'équivalence



Il y a une infinité de représentants

Un vecteur $\vec{u}$ est une classe d'équivalence

• La relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$

Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq 0)$

a et b sont congrus modulo n [si] $a - b$ est un multiple de n

On notera $a \equiv b\,[n]$ "a est congru à b modulo n

→ $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a - a = 0 = 0 \times n$ donc $a \equiv a\,[n]$

réflexive

→ $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b\,[n] \Leftrightarrow a - b$ multiple de n

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ a - b = kn$

symétrique

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ b - a = -kn$

$\Leftrightarrow b - a$ est un multiple de n

$\Leftrightarrow b \equiv a\,[n]$

→ $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ b \equiv c\,[n] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = kn \\ \exists k' \in \mathbb{Z} \quad b - c = k'n \end{cases}$ +

$\Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z}, \ a - c = kn + k'n = (k + k')n$

$\Rightarrow \exists K = k + k' \in \mathbb{Z}, \ a - c = Kn$

$\Leftrightarrow a \equiv c\,[n]$ Transitive

Conclusion : c'est une relation d'équivalence