Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence

Exercice : On définit une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$

1°) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

2°) Quel est le graphe de $\mathcal{R}$ noté $\Gamma_{\mathcal{R}}$

3°) Déterminer les classes d'équivalence de 0, 1 et $\frac{1}{2}$

1°) ⊛ Reflexivité

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x^2 = 0 \quad$ et $\quad x - x = 0$

$\Rightarrow x^2 - x^2 = x - x \iff x \mathcal{R} x$

Cl: $\mathcal{R}$ est réflexive

⊛ Symetrie

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$

$\iff -(x^2 - y^2) = -(x - y)$

$\iff -x^2 + y^2 = -x + y$

$\iff y^2 - x^2 = y - x$

$\iff y \mathcal{R} x$ Elle est symetrique.

⊛ transitivité

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &x^2 - y^2 = x - y \\ + \ &y^2 - z^2 = y - z \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z$

$\iff x \mathcal{R} z$ Elle est transitive

Cl: C'est une relation d'équivalence

2°) graphe de $\mathcal{R}$

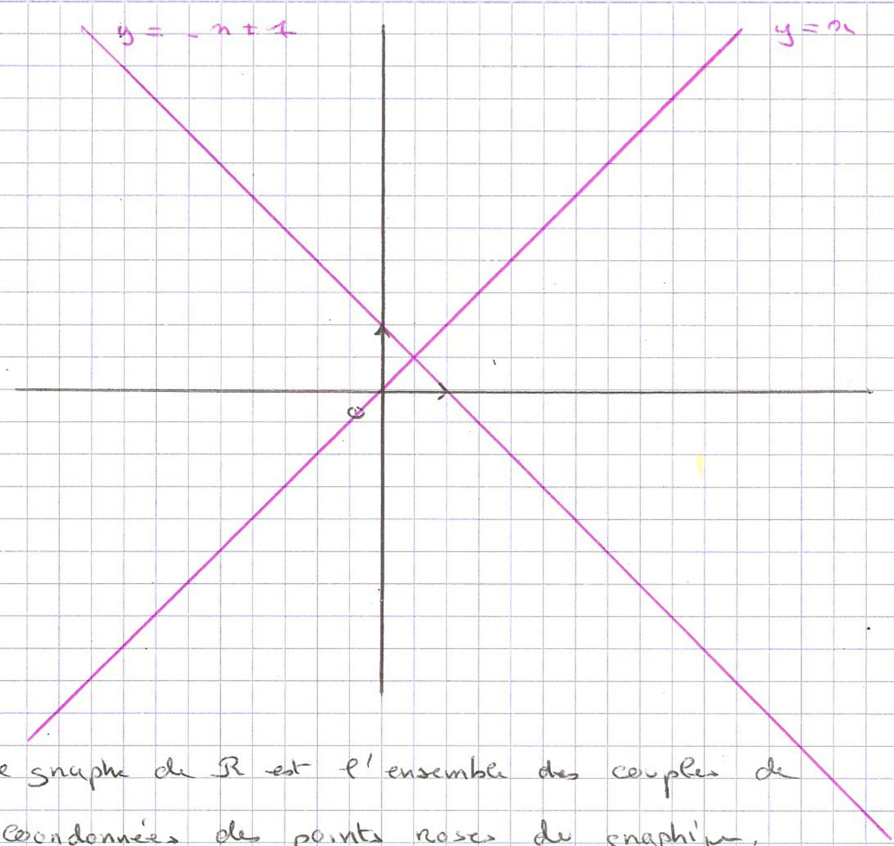
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \iff x \mathcal{R} y$

Id Rq $\iff x^2 - y^2 = x - y$

$\iff x^2 - y^2 - (x - y) = 0 \iff (x - y)(x + y) - (x - y) = 0$

$\iff (x - y)(x + y - 1) = 0 \iff x - y = 0$ ou $x + y - 1 = 0$

$\iff y = x$ ou $y = -x + 1$



Le graphe de $\mathcal{R}$ est l'ensemble des couples de coordonnées des points roses du graphique.

3°) ⊛ Classe de 0

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in \dot{0} \Leftrightarrow x \mathcal{R} 0 \Leftrightarrow x^2 - 0^2 = x - 0$

$\Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ $\qquad$ Cl: $\dot{0} = \{0, 1\}$

⊛ Classe de 1

$1 \in \dot{0} \Rightarrow \dot{1} = \dot{0} = \{0, 1\}$

⊛ Classe de $\frac{1}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in \dot{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \mathcal{R} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ $\qquad$ Cl: $\dot{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$