## 2°) Les relations d'ordre

Définition :

Une relation binaire dans un ensemble $E$ est une relation d'ordre $\boxed{\text{ssi}}$ elle est reflexive, antisymétrique et transitive

Vocabulaire :

- On dit aussi "ordre" au lieu de relation d'ordre
- un ensemble ordonné est un couple $(E, \leq)$ où $\leq$ est un ordre sur $E$

Définition :

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné

1) deux éléments $x$ et $y$ de $E$ sont comparables (pour $\leq$) $\boxed{\text{ssi}}$ $x \leq y$ ou $y \leq x$

2) $\leq$ est un ordre total $\boxed{\text{ssi}}$ $\forall (x, y) \in E^2$ $x \leq y$ ou $y \leq x$

Exemples :

- $\leq$ dans $\mathbb{R}$

$\rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x \Rightarrow$ reflexive

$\rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$ antisymétrique

$\rightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow x \leq z$

$\Rightarrow$ transitive

C'est une relation d'ordre

Copyright : ©Programmaths 2020

- $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$ (inclusion dans l'ensemble des parties de $E$)

→ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ $\quad x \in A \Rightarrow x \in A \Leftrightarrow A \subset A$ réflexive.

→ $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \Rightarrow A = B \quad \text{antisymétrique}$$

→ $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C \quad \text{transitive}$$

Définition :

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné

On définit dans $E$ une relation notée $<$ appelée ordre strict associé à $\leq$ par

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x < y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ x \neq y \end{cases}$$

Remarques :

- Si $E \neq \emptyset$ $<$ n'est pas un relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.
- La relation réciproque d'un ordre noté $\leq$ dans $E$ est un ordre noté $\geq$ défini par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$$

- Si $\leq$ est un ordre sur $E$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ $(A \subset E)$ la relation induite par $\leq$ dans $A$ est un ordre appelé " ordre induit par $\leq$ dans $A$ ".

**Définition**

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné

Soit $A \subset E$

1) $x \in E$ est un majorant de $A$ dans $E$ $\boxed{\text{ssi}}$ $\forall a \in A \;\; a \leq x$.

2) $A$ est majoré dans $E$ $\boxed{\text{ssi}}$ $A$ admet au moins un majorant dans $E$

3) $\alpha \in E$ est le plus grand élément de $A$

$\boxed{\text{ssi}}$ $\begin{cases} \alpha \in A \\ \forall a \in A \quad a \leq \alpha \end{cases}$

**Exemple**: $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

possède un plus petit élément mais pas de plus grand élément.

**Propriété**: $\boxed{\text{Si}}$ $A$ possède un plus grand élément

$\boxed{\text{Alors}}$ il est unique

**Démonstration**: $\alpha$ est le plus grand élément de $A$

Supposons qu'il existe un 2ème plus grand élément de $A$ que l'on notera $\beta$.

On a alors $\beta \in A \Rightarrow \beta \leq \alpha$ car $\alpha$ est le + gd élt

$\alpha \in A \Rightarrow \alpha \leq \beta$ car $\beta$ est le + gd élt

$\Rightarrow \alpha = \beta$ d'où l'unicité.

**Définition**

L'ensemble des majorants de $A$ dans $E$ est noté $\text{Maj}_E(A)$

$\boxed{\text{Si}}$ $\text{Maj}_E(A)$ possède un plus petit élément $M$

$\boxed{\text{Alors}}$ $M$ est appelé la borne supérieure de $A$ dans $E$ et elle est notée $\text{Sup}_E(A)$ ou $\text{Sup}(A)$

Copyright : ©Programmaths 2020

exemples avec les intervalles de $\mathbb{R}$ et la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$

- $A = [-3 ; 5[$

  $\mathrm{Maj}_{\mathbb{R}}(A) = [5 ; +\infty[$

  $\mathrm{Min}_{\mathbb{R}}(A) = ]-\infty ; -3]$

  $\mathrm{Sup}_{\mathbb{R}}(A) = 5$

  $\mathrm{Inf}_{\mathbb{R}}(A) = -3$

  le plus petit élément de A est $-3$

  A ne possède pas de plus grand élément

- $A = ]1 ; +\infty[$

  A n'est pas majoré. donc pas de borne supérieure ni de + grand élément.

  $\mathrm{Min}_{\mathbb{R}}(A) = ]-\infty ; 1]$

  $\Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathbb{R}}(A) = 1$

  A ne possède pas de + petit élément.