La relation de divisibilité : ordre ou non ?

Exercice : 1) La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$? sur $\mathbb{Z}^*$?

2) Si oui, est-ce une relation d'ordre total ?

· Définition : Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$

a divise b (noté $a \mid b$)

ssi $\exists c \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ac$

exple : $2 \mid 6$ car $6 = 2 \times 3$

Reflexivité $\forall a \in \mathbb{N}^*$ $\quad a = a \times 1 \Rightarrow a \mid a$

Elle est réflexive.

Antisymétrie $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} a \mid b \\ b \mid a \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \exists c \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } b = ac \\ \exists c' \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a = bc' \end{matrix}$

$\Rightarrow \exists c, c' \in \mathbb{N}^*, \ b = bc'c$

$\Rightarrow \exists c, c' \in \mathbb{N}^*, \ 1 = c'c$

$\Rightarrow c = c' = 1$ car $c, c' \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow b = a$ Elle est antisymétrique.

Transitivité : $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} a \mid b \\ b \mid c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \exists k \in \mathbb{N}^*, \ b = ak \\ \exists k' \in \mathbb{N}^*, \ c = bk' \end{matrix}$

$\Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N}^*, \ c = akk'$

$\Rightarrow \exists K = kk' \in \mathbb{N}^*, \ c = aK$

$\Leftrightarrow a \mid c$ Elle est transitive

Conclusion : La relation "divise" est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$

2 et 5 ne sont pas comparables pour cette relation d'ordre

$\Rightarrow$ ordre partiel.

Dans $\mathbb{Z}^*$

$-3 = 3 \times (-1) \Rightarrow 3 \mid -3$

$3 = -3 \times (-1) \Rightarrow -3 \mid 3$

mais $3 \neq -3$

Elle n'est donc pas antisymétrique donc ce n'est pas une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}^*$