Etude d'une relation d'ordre dans $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation $\preccurlyeq$ définie par

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

1°) Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre

L'ordre est-il total ou partiel ?

2°) le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?

Reflexivité : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $x \leq x$ et $y \leq y$

$$\Leftrightarrow (x,y) \preccurlyeq (x,y)$$

$\Rightarrow$ reflexive.

Antisymétrie : $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} (x,y) \preccurlyeq (x',y') \\ (x',y') \preccurlyeq (x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \text{ et } y \leq y' \\ x' \leq x \text{ et } y' \leq y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

$$\Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

$\Rightarrow$ Antisymétrique.

Transitivité $\forall (x,y), (x',y') (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} (x,y) \preccurlyeq (x',y') \\ (x',y') \preccurlyeq (x'',y'') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \text{ et } y \leq y' \\ x' \leq x'' \text{ et } y' \leq y'' \end{cases}$$

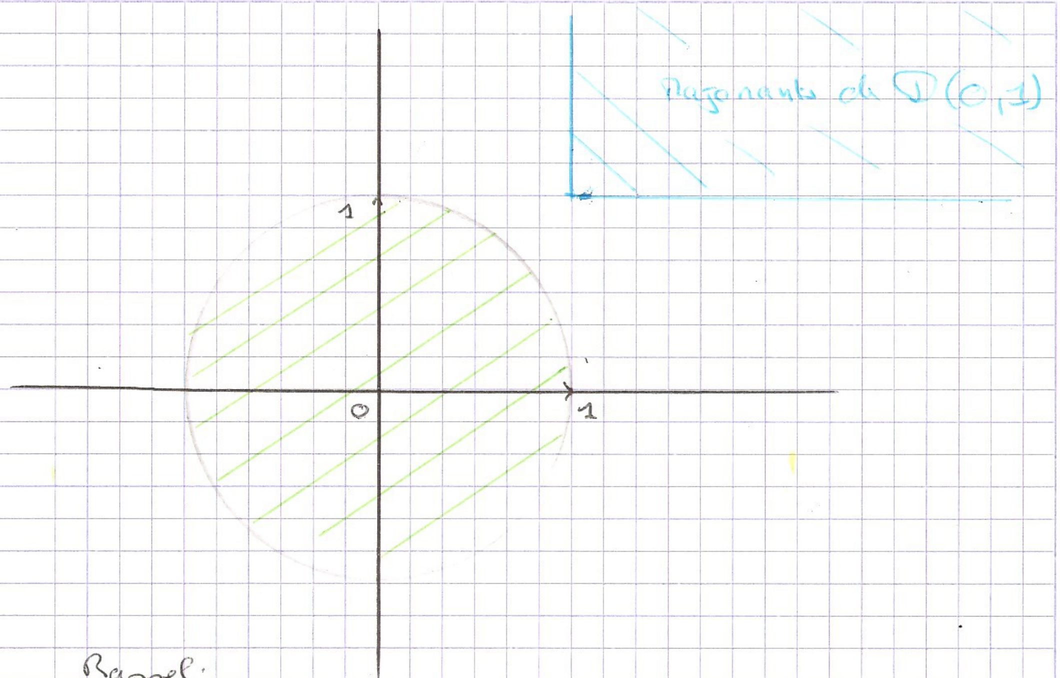
$$\Rightarrow x \leq x'' \text{ et } y \leq y''$$

$$\Rightarrow (x,y) \preccurlyeq (x'',y'')$$

$\Rightarrow$ transitive.

Conclusion c'est une relation d'ordre.

$(2;4)$ et $(3,2)$ ne sont pas comparables pour cette relation $\Rightarrow$ ordre partiel.



Rappel :

- $\mathcal{C}(0,1)$ a pour équation $x^2+y^2=1$
- $\mathcal{D}(0,1)$ fermé est caractérisé par son inéquation
  $x^2+y^2 \leq 1$ $\quad (M \in \mathcal{D}(0,1) \Leftrightarrow OM \leq 1)$

majorants ? : (a,b) est un majorant de $\mathcal{D}$

$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathcal{D}, \ (x,y) \leq (a,b)$

$\Leftrightarrow x \leq a$ et $y \leq b$.

Or $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$ on a $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a \geq 1$ et $b \geq 1$ $\Rightarrow$ $(1,1)$ est un majorant de $\mathcal{D}(0,1)$

Par extension : $\forall (a,b)$ tel que $a \geq 1$ et $b \geq 1$, (a,b) est un majorant de $\mathcal{D}$

- Aucun des majorants n'appartient à $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ pas de plus grand élément.
- $\mathcal{D}(0,1)$ admet $(1,1)$ pour borne supérieure