

FONCTIONS ET APPLICATIONS

I Fonctions

Définition:

Soient E et F deux ensembles

Une relation f de E vers F est une fonction

$$\text{[ssi]} \quad \forall (x, y, y') \in E \times F \times F \quad \begin{cases} x f y \\ x f y' \end{cases} \Rightarrow y = y'$$

On note alors $y = f(x)$ à la place de $x f y$

Remarques:

Autrement dit: IP y a unicité de l'image si elle existe

Définition:

L'ensemble de définition (ou domaine de définition)

d'une fonction f est l'ensemble des éléments x de E

tels qu'il existe $y \in F$ tel que $y = f(x)$

$$D_f = \{x \in E, \exists y \in F, y = f(x)\}$$

Exemples:

⊗ f est la relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x f y \Leftrightarrow xy = -5$$

On remarque que si $x = 0$ Alors $\forall y \in \mathbb{R} \quad xy = 0y = 0 \neq -5$

donc 0 n'est lié à aucun autre élément par la relation f

$$\forall (x, y, y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \begin{cases} x f y \\ x f y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -5 \\ xy' = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy = xy'$$

$$\Rightarrow xy - xy' = 0 \Leftrightarrow x(y - y') = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad y - y' = 0$$

$$\Rightarrow y = y' \quad \text{car } x \neq 0$$

Cl: f est une fonction et $D_f = \mathbb{R}^*$ et on a $f(x) = -\frac{5}{x}$

⑥ g est la relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x g y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

si on prend $x = 0$ $y = 1$ et $y' = -1$

$$\text{on a } x^2 + y^2 = 0^2 + 1^2 = 1 \Rightarrow 0 g 1$$

$$\text{et } x^2 + y'^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1 \Rightarrow 0 g (-1)$$

et $1 \neq -1$

donc g n'est pas une fonction.

Propriété: la composée de 2 fonctions est une fonction

Soient E, F et G des ensembles

[Si] f est une fonction de E vers F et g une fonction de F vers G

[Alors] $g \circ f$ est une fonction de E vers G

Démonstration: On sait que $g \circ f$ est une relation de E vers G

$$\forall x, z, z' \in E \times G \times G$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x g \circ f z \\ x g \circ f z' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists y \in F \text{ tq } x f y \text{ et } y g z \\ \exists y' \in F \text{ tq } x f y' \text{ et } y' g z' \end{array} \right.$$

on f est une fonction, $\left\{ \begin{array}{l} x f y \\ x f y' \end{array} \right\} \Rightarrow y = y'$

on obtient alors

$$\exists y \in F \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} y g z \\ y g z' \end{array} \right.$$

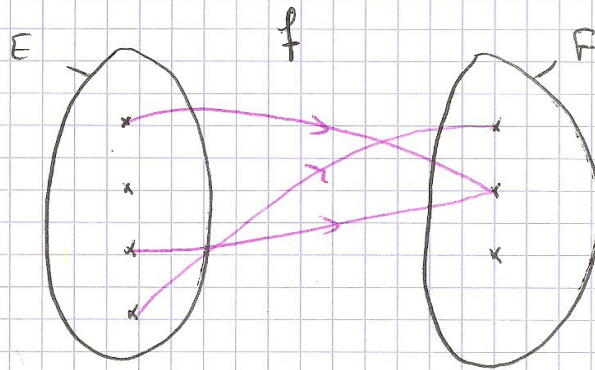
Comme g est une fonction, $z = z'$

Cf. $g \circ f$ est une fonction.

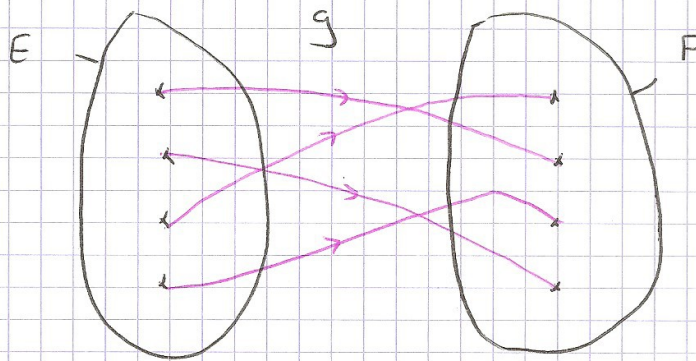
Remarque :

Dans un diagramme sagittal, une fonction se traduit par le fait qu'il y a au plus une flèche partant de chaque élément de l'ensemble de départ (une ou 0)

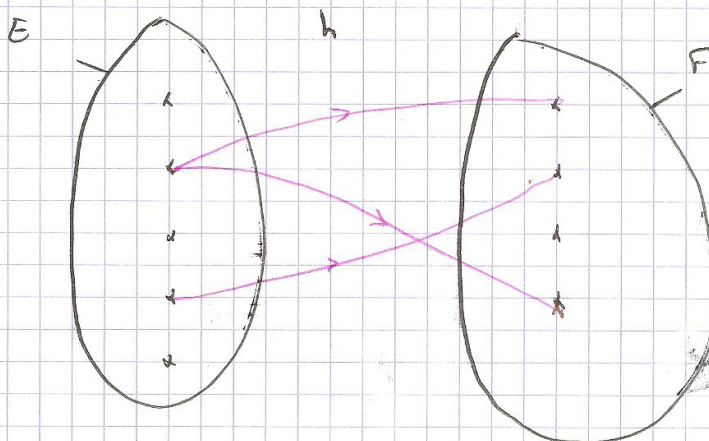
Exemples :



f est une fonction.



g est une fonction.



h n'est pas une fonction.