

injectivité, surjectivité, bijectivité

avec valeur absolue et fonction homographique

Exercice 14 Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité

de l'application $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

2°) Trouver un sous-ensemble A de $\mathbb{R} - \{1\}$ tel que la restriction $f|_A$ de f à A soit injective

3°) Trouver un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ tel que l'application h de $\mathbb{R} - \{1\} \rightarrow B$ définie par $h(x) = f(x)$ soit surjective

4°) Trouver des intervalles A et B tels que l'application

$$k: A \rightarrow B \quad x \mapsto k(x) = f(x) \quad \text{soit bijective}$$

5°) Déterminer alors l'expression de la bijection réciproque.

Travail de recherche et de réflexion avant de commencer

Avec les fonctions numériques, il est facile de "voir"

l'injectivité et la surjectivité avec la courbe représentative

↳ On fait une étude rapide de la fonction
(sans calculatrice puisque non autorisée en prépa)

On remarque que f est la composée de la fonction homographique $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ suivie de

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

la fonction valeur absolue :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad f(x) = |g(x)|$$

↳ en tant que fonction homographique, on sait que la courbe représentative de g est une hyperbole

→ Etude rapide des limites aux bornes de $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

(*) Au voisinage de $\pm\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$$\text{De même } \lim_{n \rightarrow -\infty} g(n) = 1$$

Il y a une asymptote
d'équation $y=1$

(*) Au voisinage de 1

$$\lim_{\substack{n \rightarrow 1 \\ n > 1}} \frac{n+1}{n-1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow 1 \\ n < 1}} \frac{n+1}{n-1} = -\infty$$

Il y a une asymptote
d'équation $x=1$

→ Etude des variations

propriété des fonctions homographiques

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\left(n \mapsto \frac{an+b}{cn+d} \right)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

$$\text{et on a } \forall n \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \quad f'(n) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cn+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cn+d)^2}$$

Ici $\forall n \in \mathbb{R} - \{1\}$

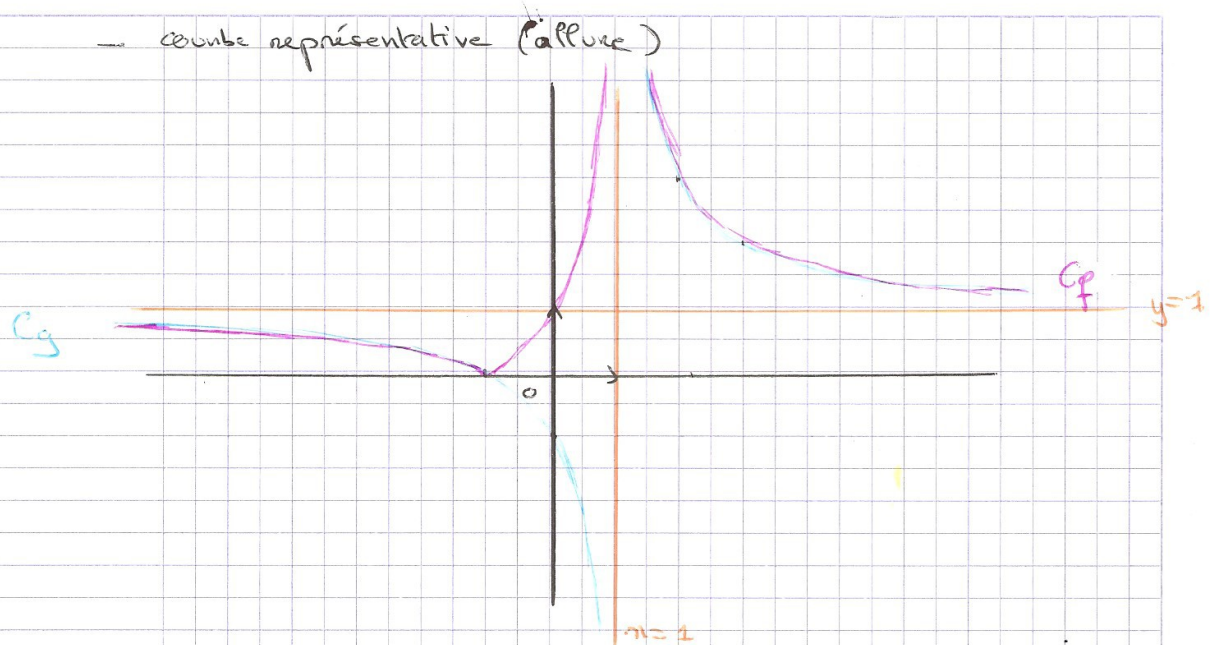
$$g'(n) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(n-1)^2} = \frac{-2}{(n-1)^2} < 0$$

la fonction g est donc strictement décroissante

la fonction f est donc définie de la façon suivante

$$\forall n \in \mathbb{R} - \{1\} \quad f(n) = \begin{cases} \bullet g(n) & \text{si } g(n) \geq 0 \\ \bullet -g(n) & \text{si } g(n) < 0 \end{cases}$$

C_f et C_g sont confondues
 C_f est la symétrique de C_g par rapport à l'axe des abscisses



Résolution de l'exercice

1°) * Surjectivité

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{R} - \{1\} \quad f(n) \geq 0$$

donc les réels négatifs ne possèdent pas d'antécédent

$\Rightarrow$ NON SURJECTIVE $\Rightarrow$ NON BIJECTIVE

* Injectivité

Avec la courbe représentative, il est clair que f n'est pas injective car, par exemple, 3 possède 2 antécédents.

Remarque: Ceci est une conjecture graphique qu'il faudrait vérifier par le calcul.

On doit donc calculer les antécédents de 3

Pour cela, on doit donner une définition de f sans valeur absolue.

L, il faut préciser le travail fait pour tracer la courbe représentative et donc étudier le signe de $g(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x-1}$	+	0	-	+
expression de $f(x) = g(x) $	$\frac{x+1}{x-1}$	0	$-\frac{(x+1)}{x-1}$	$\frac{x+1}{x-1}$

on a donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[\\ -\frac{(x+1)}{x-1} & \text{si } x \in [-1; 1[\end{cases}$$

Pour trouver les antécédents de 3 on doit donc résoudre

$$\bullet \frac{x+1}{x-1} = 3 \quad \text{sur }]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 3(x-1) \Leftrightarrow x+1 = 3x-3 \Leftrightarrow x = 2$$

et

$$\bullet -\frac{(x+1)}{x-1} = 3 \quad \text{sur } [-1; 1[$$

$$\Leftrightarrow -(x+1) = 3(x-1) \Leftrightarrow -x-1 = 3x-3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

on a donc bien $f(\frac{1}{2}) = f(2) = 3$ et $\frac{1}{2} \neq 2$
donc f n'est pas injective

2°) Pour obtenir une restriction de f qui soit injective, il suffit de prendre un intervalle sur lequel f est strictement monotone

$$f: \begin{pmatrix}]-\infty; -1] \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix} \text{ est injective.}$$

On aurait pu prendre également

$$f: [-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f:]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f:]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

3°) Pour obtenir une application surjective, il suffit de prendre $\mathbb{R}_+$ pour ensemble d'arrivée ou encore tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$

par exemple
$$h: (\mathbb{R} - \{1\}) \rightarrow \left[\frac{1}{2}; 7\right] \quad \left. \begin{array}{l} x \mapsto f(x) \end{array} \right\} \text{ est surjective}$$

4°) a) Pour obtenir une bijection, il suffit de restreindre f à un intervalle A sur lequel elle est strictement monotone et de limiter l'ensemble d'arrivée à l'image directe de A . Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones donne le résultat.

Rq: Dans ce cas ce théorème est rebaptisé "théorème des bijections"

Par exemple

$$k_1:]-\infty; -1] \rightarrow [0, 1[\quad \left. \begin{array}{l} x \mapsto f(x) \end{array} \right\}$$

Théorème
des
bijections

k_1 est dérivable donc continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k_1(x) = 1 \quad \text{et} \quad k_1(-1) = 0$$

$\forall \lambda \in [0, 1[$ l'équation $k_1(x) = \lambda$ possède une unique solution dans $]-\infty; -1]$ (TVI)

donc k_1 est une bijection de $]-\infty; -1]$ dans $[0, 1[$

on aurait pu prendre également

$$k_2: [-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{ou} \quad k_3:]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$$

b) Recherche de la bijection réciproque

→ pour k_1 et k_3

Il s'agit simplement de calculer x en fonction de y

$$\forall x \in]-\infty; -1] \quad \forall y \in [0, 1[$$

$$y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1}$$

expression de f sur $]-\infty; -1]$

$$\Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \quad \text{car } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow yx - y = x+1$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = y+1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \quad \text{car } y \neq 1$$

$$\text{donc } k_1^{-1} : \left(\begin{array}{l} [0, 1[\longrightarrow]-\infty; -1] \\ y \longmapsto \frac{y+1}{y-1} \end{array} \right)$$

$$\text{De même } k_3^{-1} : \left(\begin{array}{l}]1; +\infty[\longrightarrow]1; +\infty[\\ y \longmapsto \frac{y+1}{y-1} \end{array} \right)$$

→ pour k_2

$$\forall x \in [-1; 1[\quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{-(x+1)}{x-1} \quad \text{expression de } f \text{ sur } [-1; 1[$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) = -x-1 \quad \text{car } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow yx - y + x = -1$$

$$\Leftrightarrow x(y+1) = y-1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y+1} \quad \text{car } y \neq -1$$

$$\text{donc } k_2^{-1} : \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow [-1; 1[\\ y \longmapsto \frac{y-1}{y+1} \end{array} \right)$$