LOIS DE COMPOSITION INTERNES

I Définition et exemples

Définition :

Soit E un ensemble

On appelle loi de composition interne sur l'ensemble E toute application de $E \times E$ dans E

Remarque : On dit aussi plus simplement "loi interne" sur E

exemples : Les lois de composition internes rencontrées au cours de la scolarité

- l'addition et la multiplication sont des lois de composition internes sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

$+ : \begin{pmatrix} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (a,b) \longmapsto a+b \end{pmatrix}$ $\quad \times : \begin{pmatrix} \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ (a,b) \longmapsto a\times b \end{pmatrix}$

Remarque : la notion de loi de composition interne permet d'étendre et de préciser la notion d'opération sur un ensemble

- La soustraction

→ dans $\mathbb{N}$

$- : \begin{pmatrix} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (a,b) \longmapsto a-b \end{pmatrix}$ $\quad$ On a $(3,5) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$3-5 = -2 \notin \mathbb{N}$

$-$ n'est donc pas une application de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ donc ce n'est pas une loi interne dans $\mathbb{N}$

En revanche, $-$ est une loi interne dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

- la division

→ dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$3 \in \mathbb{N}$ $0 \in \mathbb{N}$ $3 \div 0$ n'existe pas, ce n'est pas une loi interne

→ dans $\mathbb{N}^*$

$(2;3) \in \mathbb{N}^{*2}$ mais $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}^*$ ce n'est pas une loi interne dans $\mathbb{N}^*$

→ En revanche $\div$ est une loi interne dans $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$

- l'intersection et la réunion

$$\cap : \begin{pmatrix} \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ (A,B) \longmapsto A\cap B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \cup : \begin{pmatrix} \mathcal{P}(E)^2 \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ (A,B) \longmapsto A\cup B \end{pmatrix}$$

Ce sont des lois internes dans $\mathcal{P}(E)$

Remarques :

- Habitudes de notations

Pour noter les lois internes ont utilise le plus souvent les symboles $+$, $\times$, $\oplus$, $\otimes$, $\circ$, $*$, $\top$, $\perp$ ...

- Notations conventionnelles s'il n'y a pas de risque de confusion

pour les lois notée $+$ ou $\oplus$: $a+a=2a$

pour les lois notées $*$ ou $\times$ ou $\otimes$ ou $\circ$: $a*a=a^2$

Souvent ces conventions seront précisées dans les exercices

- En réalité, $-$ et $\div$ ne seront pas traitées comme des lois de composition interne. On les considerera plutôt comme des "variantes" de $+$ et $\times$:

$-$ est l'addition de l'opposé

$\div$ est la multiplication par l'inverse.

Reste à définir précisément la notion d'opposé et d'inverse (plus généralement, la notion de symétrique)