II Propriété des lois de composition internes

1) Associativité, commutativité

Définition :

Une loi interne $*$ dans un ensemble E est associative ssi $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x*y)*z = x*(y*z)$

Exemples :

- $+$ et $\times$ sont associatives dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- $3-(5-7) = 3-(-2) = 5$

  $(3-5)-7 = -2-7 = -9$

  donc $-$ n'est pas associative
- $3 \div (5 \div 7) = \dfrac{3}{\frac{5}{7}} = 3 \times \dfrac{7}{5} = \dfrac{21}{5}$

  $(3 \div 5) \div 7 = \dfrac{\frac{3}{5}}{7} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{35}$

  donc $\div$ n'est pas associative.

Remarque :

Si $*$ est associative, on écrira $(x*y)*z = x*(y*z) = x*y*z$

Exemple avec une loi non habituelle.

On définit la loi $*$ dans $\mathbb{Q}$ par $*: \begin{pmatrix} \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x,y) \longmapsto x*y = \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{Q}, \quad x*y = \dfrac{x+y}{2}$

$*$ est-elle associative ?

- $1*(2*3) = 1*\dfrac{2+3}{2} = 1*\dfrac{5}{2} = \dfrac{1+\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{\frac{7}{2}}{2} = \dfrac{7}{4}$
- $(1*2)*3 = \dfrac{1+2}{2}*3 = \dfrac{3}{2}*3 = \dfrac{\frac{3}{2}+3}{2} = \dfrac{\frac{9}{2}}{2} = \dfrac{9}{4}$

donc $*$ n'est pas associative.

Notations

Pour des lois internes associatives, on pourra adopter les notations suivantes pour synthétiser l'écriture.

→ Pour une loi notée +

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \underbrace{x_1 + x_2 + \dots + x_n}_{n \text{ termes}}$$

→ Pour une loi notée ×

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \underbrace{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n}_{n \text{ facteurs}}$$

→ Pour une loi $*$ (et autres lois)

symbole de la loi →

$$\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i = \underbrace{x_1 * x_2 * \dots * x_n}_{n \text{ facteurs (ou termes suivant le symbole)}}$$

Définition :

Une loi interne $*$ dans un ensemble E est commutative

$\boxed{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E \quad x * y = y * x$

exemples :

- $+$ et $\times$ sont commutatives dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$
- $\left.\begin{array}{l} 3-5=-2 \\ 5-3=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3-5 \neq 5-3$ donc $-$ n'est pas commutative
- $\left.\begin{array}{l} 5 \div 3 = \frac{5}{3} \\ 3 \div 5 = \frac{3}{5} \end{array}\right\}$ $5 \div 3 \neq 3 \div 5$ donc $\div$ n'est pas commutative
- Avec la loi $*$ définie par $x * y = \frac{x+y}{2}$ dans $\mathbb{Q}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x * y = \frac{x+y}{2}$

$= \frac{y+x}{2}$ car $+$ est commutative

$= y * x$

cl : $*$ est commutative

Vocabulaire.

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$

Soient $x, y \in E$

On dit que x et y commutent (ou sont permutables)

$\boxed{\text{ssi}}$ $x * y = y * x$

Ainsi, une loi interne est commutative $\boxed{\text{ssi}}$ tous les éléments de E sont permutables deux à deux.

Proposition.

$\boxed{\text{Si}}$ $*$ est une loi interne associative et commutative

$\boxed{\text{Alors}}$ $\underset{i=1}{\overset{n}{*}} (x_i * y_i) = \left(\underset{i=1}{\overset{n}{*}} x_i\right) * \left(\underset{i=1}{\overset{n}{*}} y_i\right)$

Démonstration :

$*$ étant associative et commutative, on peut permuter et regrouper tous les éléments comme on le souhaite.

On regroupe donc et on ordonne tous les x_i puis tous les y_i pour parvenir au résultat.