

Montrer qu'une loi interne est associative, commutative, ou non

Exercice 1: Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi interne, associative et commutative. Soit $a \in E$

On définit dans E la loi interne T par

$$\forall x, y \in E, x T y = x * a * y$$

Montrer que T est associative et commutative.

Associativité

$$\forall x, y, z \in E$$

$$\begin{aligned} (x T y) T z &= (x * a * y) T z \\ &= (x * a * y) * a * z \\ &= x * a * (y * a * z) \quad \text{car } * \text{ associative} \\ &= x * a * (y T z) \\ &= x T (y T z) \end{aligned}$$

Conclusion: T est associative

Commutativité

$$\forall x, y \in E$$

$$\begin{aligned} x T y &= x * a * y \\ &= x * y * a \quad \text{car } * \text{ commutative} \\ &= y * x * a \quad \text{"} \\ &= y * a * x \quad \text{"} \\ &= y T x \end{aligned}$$

Conclusion: T est commutative.

Exercice 2 : On définit la loi interne $*$ dans \mathbb{R} par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = x + y + x^2 y$$

Montrez que $*$ n'est ni associative ni commutative.

Associativité :

$$\begin{aligned}(1 * 2) * 3 &= (1 + 2 + 1^2 \times 2) * 3 \\ &= 5 * 3 \\ &= 5 + 3 + 5^2 \times 3 = 83\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 * (2 * 3) &= 1 * (2 + 3 + 2^2 \times 3) \\ &= 1 * 17 \\ &= 1 + 17 + 1^2 \times 17 \\ &= 35\end{aligned}$$

Conclusion : $*$ n'est pas associative.

$$\text{car } (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$$

Commutativité :

$$1 * 2 = 1 + 2 + 1^2 \times 2 = 5$$

$$2 * 1 = 2 + 1 + 2^2 \times 1 = 7$$

Ce : $*$ n'est pas commutative.