Comment résoudre une équation avec une loi interne

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi interne $*$ par

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = x + y + x^2 y$

Résoudre les équations

1) $2 * x = -3$ 2) $x * 2 = -3$ 3) $x * x = 3$

1°) $2 * x = -3$

$\Leftrightarrow 2 + x + 2^2 x = -3$

$\Leftrightarrow 5x + 2 = -3$

$\Leftrightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

2°) $x * 2 = -3$

$\Leftrightarrow x + 2 + x^2 \times 2 = -3$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 5 = 0$

$\Delta = 1 - 40 = -39 < 0$ pas de solution.

$S = \emptyset$

3°) $x * x = 3$

$\Leftrightarrow x + x + x^2 x = 3$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0$

On remarque qu'il y a une racine évidente : 1

Théorème :

Soit $P(x)$ une fonction polynome de degré ≥ 1

soit $a \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Si}}$ a est une racine de $P(x)$

$\boxed{\text{Alors}}$ $P(x)$ est factorisable / divisible par $(x - a)$

On a alors $P(x) = (x-a)\,Q(x)$ avec degré de Q = degré de $P - 1$

⊛ Méthode de factorisation par identification des coefficients

$$x^3+2x-3 = (x-1)(ax^2+bx+c)$$
$$= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$$
$$= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

Par identification des coefficients

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-a = 0 \\ c-b = 2 \\ -c = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=0+a=1 \\ c=b+2=1+2=3 \\ c=3 \end{cases}$$

donc $x^3+2x-3 = (x-1)(x^2+x+3)$

⊛ Méthode de factorisation par division de polynômes

$$\begin{array}{l|l} x^3+0x^2+2x-3 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^3-x^2) & x^2+x+3 \\ \hline 0+x^2+2x-3 & \\ -(x^2-x) & \\ \hline 3x-3 & \\ -(3x-3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc $x^3+2x-3 = (x-1)(x^2+x+3)$

on a alors

$x*x = 3$

$\iff (x-1)(x^2+x+3)=0$

$\iff x-1=0$ ou $x^2+x+3=0$

$\iff x=1$ $\quad\Delta=-11<0$

$$S=\{1\}$$