2°) Éléments réguliers (ou simplifiable)

Définition :

Soit E un ensemble muni d'une l.c. interne $*$. Soit $a \in E$

1. a est régulier (ou simplifiable) à gauche pour $*$

$\boxed{\text{ssi}}$ $\forall (x,y) \in E^2 \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y$

2. a est régulier (ou simplifiable) à droite pour $*$

$\boxed{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E \quad x * a = y * a \Rightarrow x = y$

3. a est régulier (ou simplifiable) pour $*$

$\boxed{\text{ssi}}$ a est régulier à gauche et à droite pour $*$

$\boxed{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E \quad \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{cases}$

Exemples :

- Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, tout élément est régulier pour $+$

par exemple : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 2 + x = 2 + y \Rightarrow x = y \\ x + 2 = y + 2 \Rightarrow x = y \end{cases}$

donc 2 est régulier pour $+$

- Dans $\mathbb{R}$, les éléments réguliers pour la multiplication sont les réels non nuls

par exemple $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 5x = 5y \Rightarrow x = y \\ x \times 5 = y \times 5 \Rightarrow x = y \end{cases}$

donc 5 est régulier

en revanche on a

$0 \times 3 = 0 \times 5$ mais $3 \neq 5$ donc 0 n'est pas régulier pour la multiplication.

Remarque

Si la loi $*$ est commutative, un élément régulier à gauche sera aussi régulier à droite.

↳ le travail est divisé par 2 :

ATTENTION à ne pas confondre les 2 implications suivantes

$x = y \Rightarrow a * x = a * y$ est toujours VRAIE

$a * x = a * y \Rightarrow x = y$ peut être VRAIE ou FAUSSE