

Exercice : On définit sur \mathbb{R} la loi interne $*$ par :

$$\forall m, y \in \mathbb{R} \quad m * y = m(m - y)$$

1^o) Montre que les éléments réguliers à gauche sont tous les réels non nul.

2^o) Montre qu'aucun réel n'est régulier à droite

1^o) Soit $a \in \mathbb{R}^*$

$$\forall m, y \in \mathbb{R} \quad a * m = a * y$$

$$\Leftrightarrow a(a - m) = a(a - y)$$

$$\Rightarrow a - m = a - y \quad \text{car } a \text{ est régulier pour } x$$

$$\Rightarrow -m = -y \quad \text{car } a \text{ est régulier pour } +$$

$$\Rightarrow m = y \quad \text{car } -1 \text{ est régulier pour } x$$

donc a est régulier à gauche pour x

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} 0 * 2 &= 0(0 - 2) = 0 \\ 0 * 3 &= 0(0 - 3) = 0 \end{aligned}$$

$0 * 2 = 0 * 3$ mais $2 \neq 3$ donc 0 n'est pas régulier à gauche

2^o) Recherche des éléments réguliers à droite

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\forall m, y \in \mathbb{R} \quad m * a = y * a$$

$$\Leftrightarrow m(m - a) = y(y - a)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - am = y^2 - ay$$

$$\Leftrightarrow m^2 - y^2 - a(m - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - y)(m + y - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow m - y = 0 \quad \text{ou} \quad m + y - a = 0$$

$$\Leftrightarrow m = y \quad \text{ou} \quad y = -m + a \quad \leftarrow \text{donne le contre-exemple}$$

On remarque que $a = -m + a \Leftrightarrow 2m = a \Leftrightarrow m = \frac{a}{2}$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall m \neq \frac{a}{2} \in \mathbb{R} \quad m * a = (-m + a) * a$$

$$\text{et } m \neq (-m + a) \quad \text{donc}$$

donc a n'est pas régulier à droite