3°) Elément neutre, élément absorbant

Définition :

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\star$. Soit $e \in E$

1. e est neutre à gauche pour $\star$

$\boxed{ssi}$ $\forall x \in E \quad e \star x = x$

2. e est neutre à droite pour $\star$

$\boxed{ssi}$ $\forall x \in E \quad x \star e = x$

3. e est neutre pour $\star$

$\boxed{ssi}$ e est neutre à gauche et à droite pour $\star$

$\boxed{ssi}$ $\forall x \in E \quad e \star x = x \star e = x$.

exemples :

- 0 est neutre pour $+$

car $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 + x = x + 0 = x$

- 1 est neutre pour $\times$

car $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \times x = x \times 1 = x$

Notation :

$\boxed{Si}$ E est muni d'une loi $\star$ admettant un élément neutre e

$\boxed{Alors}$ $\forall x \in E$ on note $x^0 = e$

Propriété :

$\boxed{Si}$ une loi $\star$ possède un élément neutre $\boxed{alors}$ il est unique

Démonstration : par l'absurde.

supposons que $\star$ possède 2 éléments neutres e et e'

$$e \underset{\uparrow}{=} e \star e' \underset{\uparrow}{=} e'$$

e' est neutre à droite $\qquad$ e est neutre à gauche

Remarque : Ici aussi, si $\star$ est commutative, il suffira de montrer la neutralité à gauche (ou à droite)

le travail est divisé par 2

Définition :

a est un élément absorbant pour $*$

$\boxed{\text{Ssi}}$ $\forall x \in E \quad a * x = x * a = a$

exemples :

- 0 est absorbant pour $\times$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 x = x \times 0 = 0$
- $+$ n'a pas d'élément absorbant

4°) Elements symétrisables

Définition :

Soit E un ensemble muni d'une L.interne $*$ possédant un élément neutre e

Un élément a de E est symétrisable pour $*$

$\boxed{\text{Ssi}}$ $\exists y \in E$ tel que $a * y = y * a = e$

Remarque : La notion de symétrique suppose l'existence d'un élément neutre.

Propriété et notation :

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$ associative et possédant un élément neutre. Soit $a \in E$

$\boxed{\text{Si}}$ a est symétrisable pour $*$

$\boxed{\text{Alors}}$ son symétrique est unique

le symétrique est alors noté $sym(a)$ ou a^{-1} ou $-a$

Demonstration :

Supposons que a possède deux symétriques y et y' tels que $a * y = y * a = e$ et $a * y' = y' * a = e$

$$y = y * e \underset{y' = sym(a)}{=} y * (a * y') \underset{\text{associativité}}{=} (y * a) * y' \underset{y = sym(a)}{=} e * y' = y'$$

propriété :

$\boxed{\text{Si}}$ x et y sont symétrisables pour $*$

$\boxed{\text{Alors}}$ $x * y$ est aussi symétrisable et on a

$$(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

Demonstration.

$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y)$

$= y^{-1} * (x^{-1} * (x * y))$ associativité de $*$

$= y^{-1} * ((x^{-1} * x) * y)$ associativité.

$= y^{-1} * (e * y)$ car x^{-1} symétrique de x

$= y^{-1} * y = e$

De même on montre que $(x*y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e$

propriété :

Si x est symétrisable $\boxed{\text{Alors}}$ il est régulier pour $*$

Demonstration

$\forall x, y \in E$ Soit $a \in E$ et a^{-1} son symétrique

$a * x = a * y$

$\Rightarrow a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y)$

$\Rightarrow (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y$

$\Rightarrow e * x = e * y$

$\Rightarrow x = y$