

## Recherche de l'élément neutre

Exercice 1: On définit dans  $\mathbb{R}$  la loi interne  $*$  par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = x + y - xy$$

Montrez que  $*$  admet un élément neutre que l'on déterminera

Méthode 1: Il se peut que l'élément neutre soit évident

↳ On émet une conjecture puis on la vérifie

Il semble que 0 soit neutre pour  $*$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{R} \quad 0 * n = 0 + n - 0n = n$$

$$\bullet \forall m \in \mathbb{R} \quad m * 0 = m + 0 - m \times 0 = m$$

Conclusion: 0 est l'élément neutre pour  $*$

Exercice 2: On définit une loi interne  $*$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x + y + (x+3)(y-4)$$

Montrez que  $*$  admet un élément neutre à droite que l'on déterminera et qu'il n'y a aucun neutre à gauche

Méthode 2: On recherche l'élément neutre grâce à la définition

Soit  $e \in \mathbb{R}$   $e$  est neutre à droite

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad n * e = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{R} \quad 2n + e + (n+3)(e-4) = n$$

$$\Leftrightarrow \quad n + e + en - 4n + 3e - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{R} \quad n(e-3) + 4(e-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{R}, (e-3)(n+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{R} \quad e-3=0 \quad \text{ou} \quad n+4=0$$

$$\Rightarrow e-3=0 \quad \text{CP: } 3 \text{ est neutre à droite}$$

$$\Rightarrow e=3$$

$$3 * 2 = 2 * 3 + 2 + (3+3)(2-4) = 8 + 6 \times (-2) = -4 \neq 2 \\ 3 \text{ n'est pas neutre à gauche}$$