Comment déterminer les éléments symétrisables et leurs symétriques

Exercice : On considère la l.c. interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$*:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x*y = x+y-xy$$

Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables pour $*$ ainsi que l'expression de leurs symétriques.

Remarque : • $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\quad x*y = x+y-xy$

$$= y+x-yx$$
$$= y*x \implies \text{COMMUTATIVE}$$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 0*x = 0+x-0x = x$

Donc 0 est neutre pour $*$

Recherche des éléments symétrisables

Soit $a \in \mathbb{R}$ $\quad a$ est symétrisable $\iff \exists x \in \mathbb{R}$ tq $a*x = x*a = 0$

↳ on résout donc l'équation d'inconnue x $\quad a*x = 0$

$$a*x = 0$$
$$\iff a+x-ax = 0$$
$$\iff x(1-a) = -a$$
$$\iff x = \frac{-a}{1-a} \quad \text{et } a \neq 1$$

Tous les réels $a \neq 1$ sont symétrisables

De plus $1*x = 0 \iff 1+x-1x = 0 \iff 1 = 0$ impossible.

1 n'est pas symétrisable.

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 1*x = 1+x-x = 1$

donc 1 est un élément absorbant pour $*$

Conclusion : $\forall a \in \mathbb{R}-\{1\}$ $\quad a$ est symétrisable

et $a^{-1} = \dfrac{-a}{1-a}$