## 5°) Partie stable par une loi interne

**Définition :**

Soit $E$ un ensemble muni d'une loi interne $\star$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$

$A$ est une partie stable de $E$ pour $\star$

$\boxed{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in A \quad x \star y \in A$

**Remarque :** on écrit aussi :

$A$ stable pour $\star$ $\boxed{\text{ssi}}$ $A \star A \subset A$

On étend la loi $\star$ aux parties de $E$ c'est à dire à $\mathcal{P}(E)$

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \star B = \{x \star y \,,\, x \in A \,,\, y \in B\}}$$

**exemples :**

- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont stables par $+$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x+y \geq 0 \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}_+$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_- \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x+y \leq 0 \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}_-$

- $\mathbb{R}_+$ est stable pour $\times$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow xy \geq 0 \Rightarrow xy \in \mathbb{R}_+$

- $\mathbb{R}_-$ n'est pas stable pour $\times$

$-2 \in \mathbb{R}_- \quad -3 \in \mathbb{R}_- \quad (-2) \times (-3) = 6 \notin \mathbb{R}_-$

- $[0,1]$ est stable pour $\times$

$\forall x, y \in [0,1]$

$$\begin{array}{rl} & 0 \leq x \leq 1 \\ \times & (0 \leq y \leq 1) \\ \hline \Rightarrow & 0 \leq xy \leq 1 \end{array} \Rightarrow xy \in [0,1]$$

**Définition :**

$\boxed{\text{Si}}$ $A$ est une partie stable de $E$ pour $\star$

$\boxed{\text{Alors}}$ la loi interne dans $A$ définie par $\star : \begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (x,y) \longmapsto x \star y \end{array}$

est appelée loi induite sur $A$ par $\star$ de $E$

## 6°/ Distributivité :

**Définition :**

Soit $E$ un ensemble. Soient $\ast$ et $\top$ deux lois internes dans $E$

1. $\top$ est distributive à gauche sur $\ast$

$\boxed{ssi}$ $\forall x, y, z \in E \quad x \top (y \ast z) = (x \top y) \ast (x \top z)$

2. $\top$ est distributive à droite sur $\ast$

$\boxed{ssi}$ $\forall x, y, z \in E \quad (x \ast y) \top z = (x \top z) \ast (y \top z)$

3. $\top$ est distributive sur $\ast$

$\boxed{ssi}$ $\top$ est distributive à gauche et à droite sur $\ast$

exemples :

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition

- Dans $\mathcal{P}(E)$ $\cap$ est distributive sur $\cup$

$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- $\cup$ est distributive sur $\cap$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$